Lemmes de zéros et relations fonctionnelles

Evgeniy Zorin

Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Evgeniy Zorin

Lemmes de zéros et relations fonctionnelles

dirigée par Patrice Philippon

Soutenue le 30 septembre 2010 devant le jury composé de :

M. Daniel Bertrand	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. Vincent Bosser	Université de Caen	examinateur
M. Sinnou David	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. Stéphane Fischler	Université Paris Sud	examinateur
M. Federico Pellarin	Université de Saint-Étienne	rapporteur
M. Patrice Philippon	CNRS	directeur

Rapporteur non présent à la soutenance :

M. Yuri Nesterenko Université d'Etat de Moscou

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du chevaleret
75 013 Paris

École doctorale Paris centre
Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

Table des matières

Remerciements

C'est à Patrice PHILIPPON que vont mes premiers remerciements les plus chaleureux. Au cours des innombrables heures de travail qu'il m'a consacrées, j'ai pu apprécier son professionalisme extrême, sa rigueur scientifique et sa générosité. Je tiens à dire que c'est une grande chance d'avoir travaillé sous sa direction.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Daniel BERTRAND et Sinnou DAVID pour leur aide inestimable lors de la préparation de cette thèse ainsi que pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury. Je voudrais aussi remercier Marc CHARDIN, Antoine CHAMBERT-LOIRE, Marc HINDRY, Michel WALDSCMIDT,... pour leurs conseils, discussions et exposés éclairants.

Mes remerciements chaleureux vont également à la Fondation Sciences Mathématiques de Paris pour le financement décisif qu'elle m'a accordée pour finir cette thèse de doctorat.

Je suis particulièrement honoré que Yuri NESTERENKO et Federico PELLARIN aient accepté de rapporter sur mon mémoire. Je les remercie de leur travail rapide et efficace, leurs remarques et conseils m'ont été très précieux et bénéfiques. Merci !

Je suis également très heureux que Vincent BOSSER et Stéphane FISCHLER me fassent l'honneur de participer à mon jury, je les en remercie très vivement.

Je tiens aussi à remercier Viktor BERESNEVICH et Vasily BERNIK pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail pendant plusieurs années.

Un grand merci à Yuri BILU pour son soutien et l'aide amicale pendant ces quatres années.

Merci à mes amis qui partage ma passion pour les mathématiques et qui m'accompagnent sur ce chemin depuis de nombreuses années : Dmitry BODYAGIN, Claire CHAVAUDRET, Trafim LASY, Viktoria LEBED, Ivan LOSEV, Maxim ZHYHOVICH et David ZMIAIKOU. Leurs existence m'aide beaucoup.

Je remercie également tous mes amis. Sans les citer tous, ils se reconnaîtront.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Jussieu et plus particulièrement aux équipes de théorie de nombres et de géométrie et dynamique pour l'entourage chaleureux et stimulant pendant mes années de thèse.

Je souhaite aussi remercier ici toute ma famille, et tout particulièrement mes deux formidables parents, Tatiana et Vladimir, mon frère bien-aimé Kostia et son épouse Katia pour leur soutien constant, leur affection et l'intérêt qu'ils portent à ce que je fais. Merci à Timoscha, mon neveu, qui fêtera son premier demi-anniversaire très bientôt. Il donne beaucoup de joie par leur simple existence.

Enfin, un énorme merci à ma femme Aljona, l'amour de ma vie, pour tout le bonheur qu'elle m'apporte jour après jour.

Abstract

The thesis is devoted to Multiplicity Estimates, a type of results widely used in transcendence theory. Starting from the works of A.B.Shidlovskii, W.D.Brownawell and D.W.Masser it was a cornerstone in proofs of transcendence and mostly algebraic independence. For example, it is one of the important steps in Nesterenko's proof of his famous result concerning algebraic independence of values of Ramanujan's functions (allowing to deduce, in particular, the algebraic independence over $\mathbb{Q}$ of the set of numbers π, e^{π} and $\Gamma(1/4)$). One other statement of this type is a famous result of K.Nishioka (previously conjectured by Mahler) allowing one to prove many interesting transcendence results on some series related to linear recurrence sequences and the so-called automatic sequences. Further results in this way were obtained by Th.Töpfer, K.Nishioka, P.-G.Becker and others.

The objective of this thesis is a thorough study, in a general frame, of mutiplicity lemmata, leading to improvements of known results on algebraic independence. Our multiplicity lemma, proved in a quite general situation, answers a question raised in [42], complementing in many interesting situations the method presented in this reference. It reduces the proof of multiplicity estimates to the study of ideals stable under some appropriate algebraic transformation. In particular, this theorem allows to improve slightly a result of Nesterenko concerning solutions of systems of differential equations. In the same time this theorem provides, under some condition concerning stable varieties, the estimation with the best possible exponent in the case considered by Nishioka and Töpfer (i.e. the case concerning solutions of systems of functional equations). The latter result leads to the study of irreducible varieties stable under some rational transformation, a subject interesting on its own.

Joined to the general method of [41] and [42], our new estimations lead to qualitative et quantitative improvements of certain results on algebraic independence of values of functions in the frame of Mahler's method due to Töpfer [49]. This includes algebraic independence of values at transcendental points.

Résumé

La thèse est consacrée aux estimations de multiplicité. Ce type de résultats est utilisé en théorie de la transcendance. A partir des travaux de A. B. Shidlovskii, W.D.Brownawell et D.W.Masser il sont régulièrement utilisés dans les preuves de transcendance et surtout d'indépendance algébrique. Par exemple, la démonstration du lemme de multiplicité est un élément très important de la preuve par Yu. Nesterenko du résultat sur l'indépendance algébrique des valeurs des fonctions de Ramanujan (qui montre en particulier l'indépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$ des nombres π, e^{π} et $\Gamma(1/4)$).

Un autre résultat de ce type est une preuve par K.Nishioka d'une conjecture de K.Mahler. Ce lemme de multiplicité a permis de démontrer beaucoup de résultats concernant la transcendance des séries liées aux suites récurrentes et des suites engendrées par des automates finis. Cette ligne de recherche s'est prolongée dans des travaux de Th.Töpfer, K.Nishioka, P.-G.Becker et les autres.

Le but de ce mémoire est l'étude approfondie, dans un cadre général, des lemmes de multiplicité conduisant à des améliorations de résultats d'indépendance algébrique connus. Notre lemme de multiplicité général répond à la question posé dans [42], complétant dans beaucoup de situations intéressantes la méthode élaborée dans cette référence. Il réduit la preuve des estimations de multiplicité à l'étude des idéaux stables sous une transformation algébrique. En particulier, ce théorème permet d'améliorer un peu le résultat de Yu.Nesterenko concernant les solutions de système d'équations différentielles. Dans le même temps ce théorème donne, sous une condition concernant des variétés stables, l'estimation avec l'exposant le meilleur possible dans les cas étudiés par K.Nishioka et Th.Töpfer (i.e. le cas concernant les solutions d'équations fonctionnelles). Ce dernier résultat conduit à l'étude des variétés irréductibles stables sous une transformation rationnelle, ceci semble d'être un sujet intéressant en soi.

Jointes à la méthode générale de [41] et [42], nos nouvelles estimations conduisent à des améliorations qualitatives et quantitatives de certains résultats d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions dans le cadre de la méthode de Mahler dus à Töpfer [49], incluant l'indépendance algébrique de valeurs en un point transcendant.

Introduction

Les méthodes classiques de transcendance, ou plus généralement d'indépendance algébrique, minorent le degré de transcendance d'une extension de corps $K(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))/K$ (où K désigne un corps de base, $f_1, ..., f_n$ sont, par exemple, des fonctions analytiques et $\alpha \in \overline{K}$). Elles conduisent aussi à des mesures d'indépendance algébrique : minoration de $|P(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))|$ (pour $P \in K[f_1, ..., f_n]$) en termes du degré et de la hauteur de P. Ceci demande généralement une majoration de l'ordre en zéro d'une fonction auxiliaire du type $P(f_1(z), ..., f_n(z))$. On a une méthode générale utilisant des estimations de ce type pour établir des résultats de transcendance et d'indépendance algébrique (cf. [42] et [41]). Le but de ce mémoire est l'étude approfondie, dans un cadre général, des lemmes de multiplicité (voir théorème 0.1 ci-après et théorème 2.16, théorèmes 2.30, 2.34, du chapitre 2 et théorème 3.11 du chapitre 3) conduisant à des améliorations de résultats d'indépendance algébrique connus (théorèmes 0.5, 0.8 et 0.11, corollaires 0.6, 0.7, 0.9 et 0.10, ci-dessous).

On montre, avec l'algèbre linéaire, qu'il existe une constante $C_S \in \mathbb{R}^+$ (ne dépendant que de $\underline{f}$) telle qu'on puisse construire un polynôme $P_1 \in K[X_1, ..., X_n]$ de degré arbitrairement grand et satisfaisant

$$\mathrm{ord}_{z=0} P_1(f_1(z), ..., f_n(z)) \geq C_S \left(\deg P_1\right)^n, \tag{1}$$

où $\mathrm{ord}_{z=0}$ désigne l'ordre en 0 sur $K[[z]]$.

La meilleure majoration possible, à constante près, de la quantité $\mathrm{ord}_{z=0} P(f_1(z), ..., f_n(z))$ est donc

$$\mathrm{ord}_{z=0} P_1(f_1(z), ..., f_n(z)) \leq C \left(\deg P_1\right)^n \tag{2}$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}^+$.

D'un autre côté, il est facile de construire des exemples de fonctions $\underline{f}$ pour lesquelles la majoration (2) (et même des majorations beaucoup plus faibles) n'est pas vraie. Il suffit de considérer $\underline{f}$ avec $f_1(z) = z$ et $f_2(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z^{2^{2^{2^i}}}$, la majoration (2) est fausse pour n'importe quelle constante C et pour une suite infinie de polynômes P, à savoir les polynômes $Q_n =$

$X_2 - \sum_{i=1}^{n} (X_1)^{2^{2^{2^i}}}$ pour lesquels $\mathrm{ord}_{z=0} Q_n(f_1(z), f_2(z)) = 2^{2^{2^{n+1}}}$ et $2^{2^{2^{n+1}}} > \left(2^{2^{2^n}}\right)^n$ pour tout n suffisamment grand.

Donc, pour obtenir une majoration de $\mathrm{ord}_{z=0} P(f_1(z), ..., f_n(z))$ en fonction du degré de P , il faut introduire des conditions sur $\underline{f}$.

Historique

Dans son article fondamental [44] C.L.Siegel a entre autre étudié les majorations de l'ordre en zéro de combinaisons linéaires de E-fonctions. Il a utilisé à cette fin l'élimination des variables entre formes linéaires. Plus tard, en 1932, il a appliqué la méthode de A.O.Gelfond à l'étude des fonctions elliptiques [45]. Dans cet article C.L.Siegel démontre, en utilisant l'élimination non-linéaire, des estimations de multiplicité pour des polynômes en des fonctions de Weierstrass.

En 1934, suivant l'idée de Siegel Th.Schneider a utilisé l'élimination linéaire dans sa preuve du 7ème problème de Hilbert [46]. Cette idée constitue, peut-être, la différence principale qui distingue sa démonstration de celle proposée par A.O.Gelfond qui, lui, utilise une idée d'interpolation. Plus tard, A.O. Gelfond a utilisé des méthodes analytiques afin d'obtenir des estimations de l'ordre en zéro de polynômes exponentiels. Ce travail a été achevé par R.Tijdeman [48], dont le théorème connu sur le nombre de zéros des polynômes exponentiels généralise les résultats de Gelfond.

En 1954 A.B.Schidlovskii a démontré la première estimation générale pour le nombre de zéros de formes linéaires en des solutions d'un système linéaire différentiel. Puis Yu.V.Nesterenko a généralisé ce résultat des formes linéaires aux polynômes, inaugurant ainsi les méthodes algébriques [26, 27, 28, 29] dans ce contexte. Il y introduit en particulier la notion cruciale d'idéal stable en la reliant à celle d'idéal différentiel de la théorie de Kolchin.

En 1980 W.D.Brownawell et D.W.Masser [11, 12, 13] ont donné l'estimation

$$\mathrm{ord}_{z=0} P(f_1(z), ..., f_n(z)) \leq C \left(\deg P\right)^{2^n} \tag{3}$$

pour des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ analytiques en $z = 0$ et satisfaisant un système d'équations différentielles polynomial

$$f_i' = F_i(f_1, \ldots, f_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

où $F_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Cette estimation (3) a été améliorée en $\leq C \left(\deg P\right)^n$ par Nesterenko [30].

Il faut mentionner que dans les articles cités les auteurs ont démontré des théorèmes permettant de majorer simultanément l'ordre d'annulation de $\Phi(z) = P(f_1(z), ..., f_n(z))$ en plusieurs points $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ plutôt qu'en un seul point $z = 0$.

Ces résultats reposent sur l'étude des idéaux dans les anneaux de polynômes.

Yu.Nesterenko [31] a aussi démontré l'estimation optimale (2) (à constante multiplicative près) pour une solution $\underline{f}$ d'un système d'équations différentielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{A_i(f_1(z), ..., f_n(z))}{A_0(f_1(z), ..., f_n(z))}, \tag{5}$$

$i = 1, ..., n$, où $A_0, ..., A_n$ désigne des polynômes, sous la condition que la transformation algébrique associé à (5) n'admet pas d'idéaux stables avec un grand ordre d'annulation le long de $\underline{f}$ en $z = 0$ (cf. [32], chapitre 10). Ce résultat lui a permis d'établir le théorème suivant : pour tout $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$ on a $\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(q, R(q), Q(q)R(q)) \geq 3$, où P, Q et R désigne des fonctions de Ramanujan (cf. [31] ; également on peut trouver la déduction de ce fait, avec la méthode générale, en admettant le lemme de multiplicité, dans [42]).

D'un autre côté, dans le cadre de la méhode de Mahler, K.Nishioka a démontré que pour $\underline{f} \in \Bbbk[[z]]^n$ (où $\Bbbk$ désigne un corps de caractéristique 0) satisfaisant un système d'équations linéaires

$$f_i(z^d) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(z) \tag{6}$$

$(i = 1, ..., n)$ avec $a_{ij} \in \Bbbk(z)$ $d \geq 2$ entier, on a l'estimation (2) avec $\underline{f}$.

Plus généralement, les systèmes d'équations fonctionnelles qui apparaissent dans le cadre de la méthode de Mahler peuvent s'écrire

$$f_i(p(z)) = \frac{A_i(z, f_1(z), ..., f_n(z))}{A_0(z, f_1(z), ..., f_n(z))}, \tag{7}$$

$i = 1, \ldots, n$, où $A_0, ..., A_n$ désignent des polynômes avec $\deg_z A_i \leq s$, $\deg_{\underline{X}} A_i \leq t$ et $p(z)$ une fraction rationnelle avec $\delta = \mathrm{ord}_{z=0} p(z) \geq 2$ et $d = \deg p(z)$. Voir toutefois [4] pour des systèmes algébriques encore plus généraux.

K.Nishioka a montré dans [33], lorsque $p(z) = z^d$ (où d est un entier, $d \geq 2$) et $t^n < d$, l'estimation suivante pour tout polynôme non nul $Q(z, X_1, ..., X_n)$ satisfaisant $\deg_z Q \leq M$, $\deg_{\underline{X}} Q \leq N$ (où $M \geq N \geq 1$) :

$$\mathrm{ord}_{z=0} Q(z, f_1(z), ..., f_n(z)) \leq c_0 M N^{n \log d / (\log d - n \log t)}.$$

Pour une substitution rationnelle p générale, Th. Töpfer en 1998 a montré l'estimation

$$\mathrm{ord}_{z=0} Q(z, f_1(z), ..., f_n(z)) \leq c_0 M N^{n \log d / (\log \delta - n \log t)}, \tag{8}$$

où $d \stackrel{\mathrm{def}}{=} \deg p$ et $\delta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ord}_{z=0} p$ (maintenant sous l'hypothèse $t^n < \delta$, cf. [50]).

L'estimation de Nishioka et Töpfer n'est la meilleure possible que lorsque $d = \delta$ et $t = 1$ (en particulier pour le système (6)), elle est plus faible (i.e. avec un exposant strictement plus grand que n) dans le cas général.

Tous ces résultats sont démontrés en caractéristique 0. Dans le même ordre d'idée d'autres auteurs s'intéressent au même type de résultats dans le cas de caractéristique strictement positive : P.-G.Becker [5], V.Bosser et F.Pellarin [8, 9], F.Pellarin [36, 37].

En affaiblissant l'hypothèse $\mathrm{ord}_{z=0}p(z) \geq 2$ dans le système (7) à $\mathrm{ord}_{z=0}p(z) \geq 1$ nous trouvons encore un cas important, le cas des systèmes d'équations aux q-différences correspondant au choix $p(z) = qz$ et $\deg_{\underline{X}} A_i = 1$, où $q \in \Bbbk \setminus \{0\}$. Ce type de relations a fait l'objet de plusieurs études [1, 2, 7].

Récemment P.Philippon a démontré un lemme de transfert [43]. Dans ce contexte, un lemme de transfert est un énoncé qui, portant d'un polynôme tel que $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}Q(z, f_1(z), \ldots, f_n(z))$ soit suffisamment grand, fournit une courbe algébrique qui a un grand ordre de contact avec le germe analytique $z \to (z, f_1(z), \ldots, f_n(z))$. Nous allons montrer comment ce type d'énoncé permet d'établir des lemmes de multiplicité dans plusieurs situations, englobant les cas mentionnés ci-dessus. Toutefois, nous devrons faire face au délicat problème posé par les variétés stables sous l'action de la transformation considérée.

Résultats : Lemmes de multiplicité

Le lemme de multiplicité général que nous montrons (le théorème 2.16) concerne des transformations $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (où $\mathcal{A}$ désigne l'anneau de polynômes $\Bbbk[X_0', X_1', X_0, \ldots, X_n]$) de type assez général couvrant les opérateurs différentiels et les morphismes algébriques d'anneaux de polynômes associés aux transformations biprojectives dominantes (cf. la définition 2.8 et les corollaires 2.10 et 2.11). On est naturellement amené à imposer des hypothèses sur les transformations ϕ qui ne doivent pas augmenter trop rapidement le degré des polynômes (cf. la propriété (2.1)) et qui ne doivent pas faire decroître trop rapidement l'ordre d'annulation en $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ des polynômes homogènes de $\mathcal{A}$ (cf. les propriétés (2.5) et (2.6)).

Pour une telle transformation les idéaux bi-homogènes de $\mathcal{A}$ qui sont ϕ-stables, i.e. satisfaisant la propriété $\phi(I) \subset I$, sont la clef de notre énoncé formel (cf. le théorème 2.16). Nous demandons l'existence d'une constante K_0 telle que pour tout idéal bi-homogène ϕ-stable I, tel que toute composante irréductible du lieu de zéros communs de I passe près de $\underline{f}$ (*i.e.* $\mathrm{ord}_{\underline{f}}(\mathcal{Q})$ est assez grand pour toute composante primaire $\mathcal{Q}$ de I), au moins une composante primaire $\mathcal{Q}$ de I satisfasse

$$\mathrm{ord}_{\underline{f}}(\mathcal{Q}) < K_0 \deg \mathcal{Q} \tag{9}$$

(pour la définition de $\mathrm{ord}_{\underline{f}}(\mathcal{Q})$ nous renvoyons le lecteur au sous-paragraphe 1.3, notamment aux définitions 1.20 et 1.21). En fait nous restreignons les codimensions des idéaux pour lesquels il faut vérifier (9), cf.(2.29). Notons que nous pouvons considérer la condition (9) comme une condition sur des variétés bi-projectives W, lieux des zéros communs de ces idéaux.

Dans cette situation nous établissons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout polynôme $P \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ on ait

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{z=0}\left(P(1,z,1,f_1(z),\dots,f_n(z))\right.&\\ \leq K\left(\deg_{\underline{X}'} P + \epsilon \deg_{\underline{X}} P\right)&(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n, \quad (10)\end{aligned}$$

où ϵ peut prendre la valeur 0 ou 1 en fonction des propriétés de la transformation ϕ. Par exemple, dans le cas où ϕ coïncide avec un opérateur différentiel nous avons l'estimation (10) avec $\epsilon = 0$. Par contre, lorsque ϕ est un morphisme algébrique de l'anneau de polynômes souvent nous pouvons montrer (10) seulement avec $\epsilon = 1$. Nous réussissons à séparer dans (10) les degrés en $\underline{X}'$ et en $\underline{X}$ grâce aux techniques multi-projectives dévéloppées dans [32], chapitres 5 et 7.

Mentionnons que ce résultat est valable quelle que soit la caractéristique du corps de base. Ce qui ouvre la voie à une application aux systèmes d'équations aux τ-différences utiles dans le contexte des modules de Drinfeld, cf. [36]

Dans le paragraphe (2.3) nous déduisons de notre résultat général un renforcement du théorème de Nesterenko mentionné ci-dessus (cf. le théorème 2.30) affaiblissant la condition (9) sur les idéaux stables. Ensuite, au paragraphe (2.4) nous déduisons un résultat analogue pour des solutions de systèmes d'équations fonctionnelles du type (7). Ce résultat donne la conclusion optimale dans ce cas, mais demande en revanche une vérification de la condition (9) pour les variétés stables de l'espace bi-projectif.

Décrivons plus en détail ce dernier résultat. Pour écrire l'énoncé, nous associons d'abord à tout système d'équations fonctionnelles (7) une transformation rationnelle $\mathcal{T}$ de $\mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ dans $\mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ (où $\Bbbk$ désigne un corps commutatif de caractéristique quelconque) par les formules

$$\begin{aligned}(X_0' : X_1', X_0 : \dots : X_n) \to \Big(&A_0'(X_0',X_1') : A_1'(X_0',X_1'),\\ &A_0(X_0',X_1',X_0,\dots,X_n) : \dots : A_n(X_0',X_1',X_0,\dots,X_n)\Big), \quad (11)\end{aligned}$$

où A_i, $i = 0,\dots,n$ sont les mêmes polynômes bi-homogènes en $\underline{X}'$ et $\underline{X}$ à coefficients dans $\Bbbk$ que dans (7), et $A_0'(X_0',X_1')$, $A_1'(X_0',X_1')$ sont deux polynômes homogènes à coefficients dans $\Bbbk$ satisfaisant $p(z) = \frac{A_1'(1,z)}{A_0'(1,z)}$.

Nous disons qu'une sous-variété W de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ est $\mathcal{T}$-stable, si $\overline{\mathcal{T}(W)} = W$, où $\overline{\mathcal{T}(W)}$ désigne la fermeture de Zariski de $\mathcal{T}(W)$, cf. la définition 2.33.

Noter que $\mathcal{T}$ n'est pas nécessairement définie sur tout l'espace $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$, il est possible que les polynômes A_i $(i = 1, \ldots, n)$ ou/et A'_i $(i = 1, 2)$ possèdent des zéros communs non-triviaux (i.e. différents de $(0, \ldots, 0)$), dans ce cas $\mathcal{T}$ est définie seulement sur une partie de W et $\mathcal{T}(W)$ peut ne pas être fermé au sens de la topologie de Zariski. De même nous disons que W est $\mathcal{T}^N$-stable si $\overline{\mathcal{T}^N(W)} = W$, où $\mathcal{T}^N$ désigne la N-ème itérée de $\mathcal{T}$.

Théorème 0.1. *Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif de caractéristique quelconque. Soit $(1, f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)) \in \mathbb{k}[[z]]^{n+1}$ où les séries $f_1(z), ..., f_n(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{k}(z)$ et satisfont un système de relations (7) avec $\mathrm{ord}_{z=0}p(z) = \delta \geq 1$ et $\deg p(z) = r$.*

Supposons qu'il existe une constante $K_0 \in \mathbb{R}^+$ (dépendant uniquement de $\mathcal{T}$ et de $\underline{f}$) telle que pour tout entier positif

$$N \leq 2^{n+2}(n+1)!\rho_{n+1}^{n+1} \max\left(1, \frac{4r}{s}\right)^{n+1} \tag{12}$$

(où $s = \max\left(1, \deg_{\underline{X}'} A_i\right)$ et la constante ρ_n ne dépendent que de $\mathcal{T}$, plus précisément de $\deg_{\underline{X}'} A_i$, $\deg_{\underline{X}} A_i$ et $\deg_{\underline{X}'} A'_i$: elle est introduite à la définition 2.12 où il faut substituer $\nu_0 = \deg_{X'} A'_i$, $\nu_1 = s$ et $\mu = deg_X A_i$) toute variété irréductible $\mathcal{T}^N$-stable $W \subsetneq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ satisfait nécessairement

$$\mathrm{ord}_{\underline{f}}(W) < K_0 \left(\deg_{(0,\dim W)} W + \deg_{(1,\dim W-1)} W\right). \tag{13}$$

Alors, il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout polynôme $Q(z, X_0, ..., X_n) \in \mathbb{k}[z, X_0, ..., X_n]$, $Q(z, X_0, ..., X_n) \neq 0$ homogène en $X_0, \ldots, X_n$, on a l'estimation

$$\mathrm{ord}_{z=0}Q(z, f_1(z), ..., f_n(z)) \leq C \left(\deg_z Q + \deg_{\underline{X}} Q + 1\right) \left(\deg_{\underline{X}} Q + 1\right)^n. \tag{14}$$

Remarque 0.2. On peut supposer que $\mathbb{k}$ est algébriquement clos. En effet, si on remplace $\mathbb{k}$ par sa clôture algébrique, cela ne change pas les conditions initiales du théorème (i.e. que $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{k}$ et les relations (7)), et la conclusion du lemme démontré pour $\overline{\mathbb{k}}$ implique immédiatement la même conclusion pour $\mathbb{k}$.

Remarque 0.3. Le cas spécial du théorème 0.1 avec $p(z) = qz$, où $q \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$, nous donne un résultat sur le lemme de multiplicité dans le cas des systèmes d'équations aux q-différences. Ce sujet a été intensivement étudié aux cours de dernières années. Nous renvoyons le lecteur à [7] pour un panorama. Toutefois, nos énoncés n'apportent dans ce cas aucune amélioration aux résultats connus.

Remarque 0.4. Signalons qu'à l'aide du théorème 0.1 nous pouvons traiter des cas de relations apparemment plus générales que (7). Soient $s \geq 1$, $N \geq 1$

des entiers et considérons le système d'équations

$$f_i(p^{[N]}(z)) = R_i\left(z, f(z), \ldots, f(p^{[N-1]}(z))\right), \quad i = 1, ..., s$$

où R_i désigne des fractions rationnelles et $p^{[N]}$ la N-ème itération de l'application p. Remarquons que le cas $N = 1$ correspond au système du type (7).

En posant

$$\begin{aligned} f_{i,0}(z) &= f_i(z) \\ f_{i,j}(z) &= f_i(p^{[j]}(z)),\ j = 1, \ldots, N-1,\ i = 1, ..., s \end{aligned}$$

nous obtenons un ensemble de fonctions satisfaisant un système de type (7) :

$$\begin{aligned} f_{i,j}(p(z)) = f_{i,j+1}(z), \quad i = 1, \ldots, s,\ j = 0, \ldots, N-2, \\ f_{i,N-1}(p(z)) = R_i\left(z, f_0(z), \ldots, f_{n-1}(z)\right) \quad i = 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{15}$$

Le système (15) est bien du type considéré dans le théorème 0.1.

Lorsque les polynômes A_i sont linéaires en $\underline{X}$ et $\mathrm{ord}_{z=0}p(z) \geq 2$ nous réussissons à montrer (cf. §3.2) qu'il existe une constante C, ne dépendant que de $f_1, ..., f_n$, telle que toute variété $\mathcal{T}$-stable satisfait l'estimation

$$\mathrm{ord}_{\underline{f}} W \leq C$$

(cf. (3.17)). Cela nous permet de déduire du théorème 0.1 le lemme de multiplicité optimal (à constante multiplicative près, cf. le théorème 3.11), améliorant dans ce cas le résultat (8) précédent de Töpfer qui s'écrit alors :

$$\mathrm{ord}_{z=0} Q(z, f_1(z), ..., f_n(z)) \leq c_0 M N^{n \log d / \log \delta}, \tag{16}$$

où $Q \in \Bbbk[z, X_1, \ldots X_n] \setminus \{0\}$, les nombres réels $M, N > 0$ satisfont $\deg_z Q \leq M$, $\deg_{\underline{X}} Q \leq N$ et $M \geq N$, c_0 est une constante (calculé explicitement dans le travail de Töpfer) qui ne dépend pas de M et de N. Nous remplaçons l'exposant $n\frac{\log d}{\log \delta}$ par n dans (16).

Résultats : indépendance algébrique

En utilisant notre nouvelle estimation de multiplicité nous déduisons au paragraphe 3.3, à l'aide de la méthode générale de [42], plusieurs résultats sur l'indépendence algébrique, améliorant les résultats précédemment connus [49]. Signalons que tous ces résultats sur l'indépendance algébrique sont en caractéristique 0, les méthodes de transcendance étant plus délicates à manier en caractéristique finie nous nous sommes contentés de ces résultats laissant l'étude de caractéristique finie pour une phase ultérieure.

Dans la suite nous utilisons la notation $p^{[h]}(z)$ (où $h \in \mathbb{N}$) pour la h-ème itération de l'application p (ainsi $p^{[0]}(z) = z$ et $p^{[h+1]}(z) = p(p^{[h]}(z))$). Nous utiliserons également la notation $d(W)$ et $t(W)$ pour le degré et la taille (i.e. hauteur plus degré) de la variété $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ (nous rappelons ces notions au chapitre 1, voir définition 1.12 ; voir aussi le chapitre 7, §2.3 de [32]).

Théorème 0.5. *Soient $f_1(z),\ldots,f_n(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ des séries entières algébriquement indépendantes, à coefficients algébriques, définissant des fonctions analytiques dans $B(0,1)$ et satisfaisant le système,*

$$a(\mathbf{z})\underline{f}(z) = A(z)\underline{f}(p(z)) + B(z) \tag{17}$$

où $\underline{f}(z) = (f_1(z),\ldots,f_n(z))$, $a(\mathbf{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{z}]$, A (resp. B) est une matrice $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, $p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ avec $\delta = \mathrm{ord}_{z=0}p(z) \geq 2$ et $d = \deg p(z)$. Soit $y \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ tel que

$$p^{[h]}(y) \to 0$$

(avec $h \to \infty$) et tel qu'aucune itération $p^{[h]}(y) \neq 0$ ne soit zéro de $\det A$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ de dimension $k < n+1-\frac{\log d}{\log \delta}$, on ait

$$\log \mathrm{Dist}(x,W) \geq -C\left(h(W) + d(W)^{\frac{n+1-k+\varepsilon}{n+1-k-\frac{\log d}{\log \delta}}}\right)^{\frac{n+1}{n-k}-\frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \times d(W)^{\frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \tag{18}$$

où $x = (1 : f_1(y) : \ldots : f_n(y)) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Mentionnons deux conséquences immédiates de ce théorème :

Corollaire 0.6. *Dans la situation du théorème 0.5 on a*

$$\text{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(f_1(y),\ldots,f_n(y)\right) \geq n+1-\left[\frac{\log d}{\log \delta}\right].$$

Corollaire 0.7. *Dans la situation du corollaire 0.6 et en supposant $\frac{\log d}{\log \delta} < 2$, on a*

$$\text{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(f_1(y),\ldots,f_n(y)\right) = n. \tag{19}$$

Le corollaire 0.6 améliore le théorème 3 de [49] qui donne la minoration de degré de transcendence plus petite :

$$\text{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(f_1(y),\ldots,f_n(y)\right) \geq \left\lceil (n+1)\frac{\log \delta}{\log d} - 1\right\rceil$$

où $\lceil * \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur à $*$.

Le corollaire 0.7 améliore le corollaire 2 de [49] (l'estimation (19) y était démontré seulement pour $n = 1$).

Nous pouvons aussi donner une mesure d'indépendance algébrique des valeurs de $f_1, \dots, f_n$ (où $f_1, \dots, f_n$ désignent toujours des fonctions analytiques satisfaisant (17)) au point $y \in \mathbb{C}^*$ pas nécessairement algébrique. Aucun résultat de ce type n'était connu dans cette situation. Néanmoins, il faut mentionner que nos estimations dans cette situation sont plus faibles que nos estimations dans le cas de y algébrique : appliqué au cas particulier $y \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ le théorème 0.8 ci-dessous donne des résultats moins bons que le théorème 0.5.

Théorème 0.8. *Soient $f_1(z)$,...,$f_n(z)$ des séries entières algébriquement indépendantes, à coefficients algébriques, définissant des fonctions analytiques dans $B(0,1)$ et satisfaisant (17), où $p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ avec $\delta = \mathrm{ord}_{z=0}p(z) \geq 2$ et $d = \deg p(z)$. Soit $y \in \mathbb{C}^*$ tel que*

$$p^{[h]}(y) \to 0$$

(avec $h \to \infty$) et tel qu'aucune itération $p^{[h]}(y) \neq 0$ ne soit zéro de $\det A$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}}$ de dimension $k < n+1-2\frac{\log d}{\log \delta}$, on ait

$$\log \mathrm{Dist}(x, W) \geq -C \left(h(W) + d(W)^{\frac{n+1-k-\frac{\log d}{\log \delta}+\varepsilon}{n+1-k-2\frac{\log d}{\log \delta}}} \right)^{2\frac{n+1}{n-k} - \frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \times d(W)^{\frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k} - \frac{n+1}{n-k}}$$

où $x = (1 : y : f_1(y) : \ldots : f_n(y)) \in \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$.

Comme auparavant, mentionnons deux conséquences :

Corollaire 0.9. *Dans la situation du théorème 0.8 on a*

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(y, f_1(y), \dots, f_n(y)\right) \geq n+1-\left[2\frac{\log d}{\log \delta}\right].$$

Corollaire 0.10. *Dans la situation du corollaire (0.9) et en supposant $\frac{\log d}{\log \delta} < 3/2$, on a*

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(y, f_1(y), \dots, f_n(y)\right) \geq n-1. \tag{20}$$

A titre d'exemple appliquons les théorèmes 0.5 et 0.8 à l'ensemble des fonctions introduit dans [49], en améliorant l'énoncé correspondant de cette référence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixons des polynômes $q_i \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, $i = 1, \dots, n$ et $p \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaisant $\deg q_i \geq 1$ et $q_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\mathrm{ord}_{z=0}p \geq 2$. Posons

$$\chi_i(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{h=0}^{\infty} q_i\left(p^{[h]}(z)\right), \quad i = 1, \dots, n. \tag{21}$$

Les fonctions χ_i satisfont le système d'équations

$$\chi_i(z) = \chi_i(p(z)) + q_i(z), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

qui est bien du type (17). Ainsi, si nous vérifions l'indépendance algébrique de ces fonctions (ce que nous montrons sous certaines conditions dans le lemme 3.20), nous pouvons appliquer nos théorèmes 0.5 et 0.8 et obtenir le résultat suivant :

Théorème 0.11. *Soit $p \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, notons $d = \deg p$ et $\delta = \mathrm{ord}_{z=0} p \geq 2$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $q_i \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ $(i = 1, \ldots, n)$ et soient $\chi_i(z)$ les fonctions définies dans (21). Supposons que $1, q_1, \ldots, q_n$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants et au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $\deg p \nmid \deg\left(\sum_{i=1}^n s_i q_i(z)\right)$ *pour tout* $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$.
2. $\sum_{i=1}^n s_i \chi_i(z) \notin \mathbb{C}[z]$ *pour tout* $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$.

Choisissons $y \in \mathbb{C}^*$ tel que $p^{[h]}(y) \to 0$ (rappelons que nous désignons par $p^{[h]}$ la h-ème itérée de p) et $p^{[h]}(y) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. Alors on a les résultats suivants.

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_1 telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{n+1}$ de dimension $k < n + 1 - 2\frac{\log d}{\log \delta}$, on ait*

$$\log \mathrm{Dist}(x, W) \geq -C_1 \left(h(W) + d(W)^{\frac{n+1-k-\frac{\log d}{\log \delta}+\varepsilon}{n+1-k-2\frac{\log d}{\log \delta}}} \right)^{2\frac{n+1}{n-k} - \frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \times d(W)^{\frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k} - \frac{n+1}{n-k}}$$

où $x = (1 : y : \chi_1(y) : \ldots : \chi_n(y)) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$.
En particulier,

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(y, \chi_1(y), \ldots, \chi_n(y)\right) \geq n + 1 - \left[2\frac{\log d}{\log \delta}\right].$$

2. *Si de plus $y \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{n}$ de dimension $k < n + 1 - \frac{\log d}{\log \delta}$, on ait*

$$\log \mathrm{Dist}(x, W) \geq -C_2 \left(h(W) + d(W)^{\frac{n+1-k+\varepsilon}{n+1-k-\frac{\log d}{\log \delta}}} \right)^{\frac{n+1}{n-k} - \frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \times d(W)^{\frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}}$$

où $x = (1 : \chi_1(y) : \ldots : \chi_n(y)) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n}$.
En particulier,

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(\chi_1(y), \ldots, \chi_n(y)\right) \geq n + 1 - \left[\frac{\log d}{\log \delta}\right].$$

Ce théorème améliore les corollaires 4 et 5 de [49] lorsque $p \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. Dans le cas général traité par ces corollaires ($p \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$), en appliquant notre théorème 3.23 nous en fournissons l'amélioration suivante :

Théorème 0.12. *Soit $p \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$, notons $d = \deg p$ et $\delta = \mathrm{ord}_{z=0} p \geq 2$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $q_i \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ $(i = 1, \ldots, n)$ et soient $\chi_i(z)$ les fonctions définies dans (21). Supposons que $1, q_1, \ldots, q_n$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants et qu'au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $\deg p \nmid \deg \left(\sum_{i=1}^n s_i q_i(z)\right)$ *pour tout* $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$.
2. $\sum_{i=1}^n s_i \chi_i(z) \notin \mathbb{C}[z]$ *pour tout* $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$.

Choisissons $y \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ tel que $p^{[h]}(y) \to 0$ (nous désignons par $p^{[h]}$ la h-ème itérée de p) et $p^{[h]}(y) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ de dimension $k < 2n+1-\frac{\log d}{\log \delta}(n+1)$, on ait

$$\log \mathrm{Dist}(x, W) \geq -C \left(h(W) + d(W)^{\frac{1}{1-\frac{\log d}{\log \delta}\frac{n+1}{2n-k+1}}} \right)^{\frac{n+1}{n-k} - \frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \times d(W)^{\frac{k+1}{n-k}},$$

où $x = (1 : \chi_1(y) : \ldots : \chi_n(y)) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

En particulier,

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(\chi_1(y), \ldots, \chi_n(y)\right) \geq 2n + 1 - \frac{\log d}{\log \delta}(n+1).$$

Pour comparer au résultats antérieurs de Töpfer [49] voir la remarque 3.24.

Considérons maintenant les séries de Cantor étudiées dans [49] (elles sont introduites dans [47]). Posons

$$\theta_i(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{q_i(z) q_i(p(z)) \cdots q_i(p^{[h]}(z))}, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{23}$$

où $p(z) = p_1(z)/p_2(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$, $\deg p_j = d_j$ $(j = 1, 2)$, $\delta = \mathrm{ord}_{z=0} p \geq 2$, $q_i \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ avec $\deg q_i \geq 1$ et $|q_i(0)| > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Les fonctions θ_i $(i = 1, \ldots, n)$ sont analytiques au voisinage de 0 et satisfont l'équation fonctionnelle

$$\theta_i(p(z)) = q_i(z)\theta_i(z) - 1, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Si $p(z)$ est un polynôme, nous pouvons appliquer nos théorèmes 0.5 et 0.8 pour obtenir le résultat suivant (cf. le corollaire 6 de [49])

Théorème 0.13. *Supposons que $q_1, \ldots, q_n \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ sont deux à deux distincts et $p \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. Soient θ_i $(i = 1, \ldots, n)$ définies dans (23). Supposons de plus $2 < \deg p = d$, $1 \leq \deg q_i < d - 1$ pour $i = 1, \ldots, m$. Soit $y \in \mathbb{C}^*$ satisfaisant $\lim_{h\to\infty} p^{[h]}(y) = 0$, $q_i\left(p^{[h]}(y)\right) \neq 0$ et $p^{[h]}(y) \neq 0$ pour $h \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \ldots, n$. Alors on a les résultats suivants.*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_4 telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}}$ de dimension $k < n + 1 - 2\frac{\log d}{\log \delta}$, on ait*

$$\log \mathrm{Dist}(x, W) \geq -C_4 \left(h(W) + d(W)^{\frac{n+1-k-\frac{\log d}{\log \delta}+\varepsilon}{n+1-k-2\frac{\log d}{\log \delta}}} \right)^{2\frac{n+1}{n-k} - \frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \times d(W)^{\frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k} - \frac{n+1}{n-k}}$$

où $\underline{x} = (1 : y : \theta_1(y) : \ldots : \theta_n(y)) \in \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$. En particulier,

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(y, \theta_1(y), \ldots, \theta_n(y)\right) \geq n + 1 - \left[2\frac{\log d}{\log \delta}\right].$$

2. *Si de plus $y \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_5 > 0$ telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ de dimension $k < n + 1 - \frac{\log d}{\log \delta}$, on ait*

$$\log \mathrm{Dist}(x, W) \geq -C_5 \left(h(W) + d(W)^{\frac{n+1-k+\varepsilon}{n+1-k-\frac{\log d}{\log \delta}}} \right)^{\frac{n+1}{n-k} - \frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \times d(W)^{\frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}}$$

où $x = (1 : \theta_1(y) : \ldots : \theta_n(y)) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. En particulier,

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(\theta_1(y), \ldots, \theta_n(y)\right) \geq n + 1 - \left[\frac{\log d}{\log \delta}\right].$$

Dans le cas $p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ nous pouvons déduire de notre théorème 3.23 le résultat suivant, améliorant le corollaire 6 de [49].

Théorème 0.14. *Supposons que $q_1, \ldots, q_n \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ sont deux à deux distincts et p, p_j, d_j $(j = 1, 2)$, θ_i $(i = 1, \ldots, n)$ définis au (23) et après. Supposons de plus* $\max(2, d_2) < d_1 = d$, $1 \leq \deg q_i < d - 1$ *pour $i = 1, \ldots, m$. Soit $y \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ satisfaisant $\lim_{h\to\infty} p^{[h]}(y) = 0$, $q_i\left(p^{[h]}(y)\right) \neq 0$ et $p^{[h]}(y) \neq 0$ pour $h \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. Alors, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ de dimension $k < 2n + 1 - \frac{\log d}{\log \delta}(n+1)$, on ait*

$$\log \mathrm{Dist}(x, W) \geq -C_3 \left(h(W) + d(W)^{\frac{1}{1-\frac{\log d}{\log \delta}\frac{n+1}{2n-k+1}}} \right)^{\frac{n+1}{n-k} - \frac{\log \delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} \times d(W)^{\frac{k+1}{n-k}},$$

où $x = (1 : \theta_1(y) : \ldots : \theta_n(y)) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. En particulier,

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(\theta_1(y), \ldots, \theta_n(y)\right) \geq 2n + 1 - \frac{\log d}{\log \delta}(n+1).$$

Dans [16] G.V.Chudnovsky a introduit la notion de 'Normalité' d'un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On dit que $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est *normal* s'il satisfait une mesure d'indépendance algébrique de la forme $\exp(-Ch(P)\psi(d(P)))$, i.e. si pour tout polynôme $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ on a l'estimation

$$|P(x_1, \ldots, x_n)| \geq \exp(-Ch(P)\psi(d(P))), \tag{24}$$

où C désigne une constante positive réelle et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ une fonction quelconque. De plus, si on a l'estimation (24) avec $\psi(d) = d^\tau$ pour une constante τ on dit que l'on a une mesure d'indépendance algébrique du type de Dirichlet, et dans ce cas on appelle exposant de Dirichlet l'infimum des τ pour lesquels $\psi(d) = d^\tau$ satisfait (24). Dans [16] G.V.Chudnovsky mentionne que pour $n \geq 2$ les exemples de n-uplets pour lesquels la normalité est établie (i.e. qui admettent une mesure d'indépendance normale) sont assez rares, bien que presque tous les n-uplet de nombres complexes au sens de la mesure de Lebesgue soient normaux.

Le théorème de Töpfer mentionné ci-dessus (i.e. le théorème 1 de [49]), en particulier le corollaire 4 de cette référence, permet de construire une famille d'exemples de n-uplets *normaux* du type de Dirichlet avec l'exposant de Dirichlet $2n + 2$.

Notre théorème 0.11 assure l'exposant de Dirichlet $n + 2$ pour une sous-famille de ces exemples et aussi permet de fabriquer de nouveaux exemples (notamment grâce à la condition 2 du thèorème 0.11) de n-uplets normaux.

Varia

Dans le dernier chapitre de ce mémoire nous donnons quelques résultats auxiliaires qui nous semblent utiles pour l'étude cruciale des idéaux $\mathcal{T}$-stables.

Chapitre 1

Théorèmes et outils généraux

1.1 Formes éliminantes

Rappelons la notion de *forme éliminante* (ou *forme de Chow*). Plus précisement, nous allons rappeler ici la définition de *forme éliminante multihomogène*. Notre référence à ce sujet est [32], chapitre 5. On notera qu'au-delà du paragraphe introductif du chapitre 5 de [27], tous les résultats y sont énoncés et démontrés sur un anneau noethérien quelconque dans le §2.1, puis sur un corps quelconque, qui doit toutefois être supposé infini au §2.3.

Dans cette section nous notons K un corps commutatif infini.

Soient $n_1, ..., n_q \in \mathbb{N}$, introduisons l'anneau

$$K[X] \stackrel{\text{def}}{=} K[X_0^{(1)}, ..., X_{n_1}^{(1)}, ..., X_0^{(q)}, ..., X_{n_q}^{(q)}] \tag{1.1}$$

que nous considérons comme multigradué par $\deg(X_i^{(j)}) = \varepsilon_j$ pour tous $j = 1, \ldots, q$ et $i = 1, \ldots, n_j$ où ε_j est (0,... , 1,... , 0) le j-ème élément de la base canonique de $\mathbb{Z}^q$. Nous allons utiliser la notation $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^q$.

Notons $\mathcal{M}_k$ l'ensemble des monômes unitaires de multidegré $k = (k_1, \ldots, k_q)$. En particulier, $\mathcal{M}_\varepsilon$ désigne l'ensemble des monômes unitaires de multidegré $\varepsilon = (1, \ldots, 1)$. Lorsque

$$\mathfrak{m} = X_0^{(1)^{\alpha_{1,0}}} ... X_{n_1}^{(1)^{\alpha_{1,n_1}}} \cdots X_0^{(q)^{\alpha_{q,0}}} ... X_{n_q}^{(q)^{\alpha_{q,n_q}}} \in \mathcal{M}_k$$

(et donc $k_i = \alpha_{i,0} + ... + \alpha_{i,n_i}$, $i = 1, ..., q$) nous utiliserons le symbole $\binom{k}{\mathfrak{m}}$ pour le coefficient multinomial

$$\frac{k_1! ... k_q!}{\alpha_{1,0}! ... \alpha_{1,n_1}! ... \alpha_{q,0}! ... \alpha_{q,n_q}!}.$$

Pour $r \geq 0$ et $d = (d_1, ..., d_r) \in (\mathbb{N}^q)^r$ on note $K[d]$ l'anneau en de nouvelles indéterminées $u_{\mathfrak{m}}^{(l)}$:

$$K[d] := K\big[(u_{\mathfrak{m}}^{(l)})_{\substack{1 \leq l \leq r, \\ \mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{d_l}}}\big]. \tag{1.2}$$

On pose aussi $K[X][d] \stackrel{\text{def}}{=} K[d] \otimes_K K[X]$ et on définit, pour $1 \leq l \leq r$,

$$U_l \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{d_l}} u_{\mathfrak{m}}^{(l)} \mathfrak{m} \in K[X][d].$$

Lorsque I est un idéal de $K[X]$ on désignera par $I[d]$ l'idéal de $K[X][d]$ engendré par I et les éléments $U_1,...,U_r$.

Définition 1.1. ([32], chapitre 5, Définition 2.1) Soit I un idéal de $K[X]$. On définit l'*idéal caractéristique* d'indice d de I par

$$\mathfrak{U}_d(I) = \{f \in K[X][d] \mid \exists k \in \mathbb{N}^q \; f\mathcal{M}_k \subset I[d]\}$$

et l'*idéal éliminant* d'indice d de I par

$$\mathfrak{E}_d(I) = \mathfrak{U}_d(I) \cap K[d].$$

Nous avons les propriétés suivantes de l'idéal $\mathfrak{E}_d(\mathfrak{p})$:

Lemme 1.2. (lemme 2.4 de [32], chapitre 5) *Soit I un idéal de $K[X]$*

1) $\mathcal{M}_\varepsilon \subset \sqrt{I} \Leftrightarrow \mathfrak{U}_d(I) = K[X][d] \Leftrightarrow \mathfrak{E}_d(I) = K[d]$.

2) Si I est premier et si $\mathcal{M}_\varepsilon \not\subset I$ alors $\mathfrak{U}_d(I)$ et $\mathfrak{E}_d(I)$ sont premiers et de plus $I = \mathfrak{U}_d(I) \cap K[X]$.

3) Si $I = \bigcap_{h=1}^{p} I_h$, alors $\mathfrak{U}_d(I) = \bigcap_{h=1}^{p} \mathfrak{U}_d(I_h)$ et $\mathfrak{E}_d(I) = \bigcap_{h=1}^{p} \mathfrak{E}_d(I_h)$.

4) Si I est primaire et si $\mathcal{M}_\varepsilon \not\subset \sqrt{I}$, alors $\mathfrak{U}_d(I)$ et $\mathfrak{E}_d(I)$ sont primaires et de plus $\sqrt{\mathfrak{E}_d(I)} = \mathfrak{E}_d(\sqrt{I})$.

En fait, la propriété 4) n'est pas énoncée dans le lemme 2.4 de [32], chapitre 5, mais elle se démontre avec les mêmes méthodes que la propriété 2).

Remarque 1.3. En particulier, le lemme 1.2, 3) implique que si $J \subset I$ sont deux idéaux de $K[X]$, alors $\mathfrak{U}_d(J) \subset \mathfrak{U}_d(I)$ et $\mathfrak{E}_d(J) \subset \mathfrak{E}_d(I)$.

Nous noterons $\mathrm{rg}(I)$ le rang de l'idéal I (également noté $\mathrm{ht}\,(I)$ dans la référence [32]) et pour $J \subset \{1,\ldots,q\}$ on note I_J l'intersection de l'idéal I avec l'anneau $K[(X_0^{(j)},\ldots,X_{n_j}^{(j)})_{j\in J}]$.

Théorème 1.4. ([32], chapitre 5, Théorème 2.13) *Soient K un corps infini, r un entier, $\mathfrak{p}$ un idéal premier multihomogène de $K[X]$ et d un élément de $(\mathbb{N}^q \setminus \{\underline{0}\})^r$. Pour une partie J de $\{1,...,q\}$ on note r_J le nombre d'indices j $(1 \leq j \leq r)$ tels que $\mathrm{Supp}(d_j) \subset J$ (c'est-à-dire $d_{j,i} = 0$ si $i \notin J$) et $n_J = \sum_{i\in J} n_i$.*

1) $\mathfrak{E}_d(\mathfrak{p}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathfrak{p}_J) < n_J - r_J + 1$ pour toute partie J.

2) Si $\mathrm{rg}(\mathfrak{p}_J) \leq n_J - r_J + 1$ pour toute partie J alors $\mathfrak{E}_d(\mathfrak{p})$ est principal.

Corollaire 1.5. *Dans les conditions du théorème 1.4 soit I un idéal équidimensionnel multihomogène de $K[X]$ et supposons de plus $\mathrm{rg}(\mathfrak{p}_J) \leq n_J - r_J + 1$ pour toute partie J. Alors $\mathfrak{E}_d(I)$ est principal.*

Démonstration. Supposons d'abord que I est un idéal primaire. Alors, l'idéal $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$ est premier et ainsi par théorème 1.4, 2) l'idéal $\mathfrak{E}_d(\mathfrak{p})$ est principal.

On a l'inclusion
$$\mathfrak{p}^k \subset I \subset \mathfrak{p}$$
où k désigne un nombre entier positif suffisamment grand. Vu la remarque 1.3 ceci entraîne
$$\mathfrak{E}(\mathfrak{p}^k) \subset \mathfrak{E}(I) \subset \mathfrak{E}(\mathfrak{p}),$$
et comme les idéaux $\mathfrak{E}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{E}(\mathfrak{p}^k)$ sont principaux, nous concluons que $\mathfrak{E}(I)$ est aussi principal.

Retournons au cas général. Considérons la décomposition primaire de I :
$$I = \bigcap_{h=1}^{p} I_h.$$
où les idéaux I_h sont primaires pour $1 \leq h \leq p$. Vu que l'idéal I est équidimensionnel, toutes les composantes primaires I_h sont de la même dimension, et donc d'après le lemme 1.2, 4) nous avons que $\mathfrak{E}_d(I_h)$ est principal. Ainsi l'idéal I est aussi principal d'après le lemme 1.2, 3).■

Afin de simplifier certaines formules dans la suite, précisons la procédure qui donne pour tout idéal multihomogène équidimensionnel de $K[X]$ une forme éliminante unique. Fixons une fois pour toutes un ensemble $\mathrm{Irr}(K[d])$ de représentants des éléments irréductibles de $K[d]$ modulo les éléments inversibles. Notons
$$\mathrm{ppr}(J) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{\pi \in \mathrm{Irr}(K[d])} \pi^{n_\pi}, \tag{1.3}$$
où n_π est tel que le localisé de J en π s'écrit (π^{n_π}).

Nous noterons aussi
$$F_{I,d} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ppr}(\mathfrak{E}_d(I)) \tag{1.4}$$
(dans le chapitre 5 de [32] on utilise la notation $\mathrm{élim}_d(I)$ au lieu de $F_{I,d}$).

La forme éliminante possède beaucoup des propriétés intéressantes, on peut les consulter aux chapitres 5 et 6 de [32].

Définition 1.6. Si $I \subset K[X]$ est un idéal multi-homogène nous noterons $\mathcal{V}(I)$ le sous-schéma défini par I dans l'espace multi-projectif. Réciproquement, pour tout sous-schéma V de l'espace multi-projectif nous noterons $\mathcal{I}(V)$ l'idéal multi-homogène saturé dans $K[X]$ qui définit V.

Illustration géométrique. Considérons la construction de la forme éliminante projective du point de vue géométrique.

On part d'une variété projective $V \subset \mathbb{P}^n_K$ de dimension $\dim V = r$. Considérons d'abord la sous-variété V_E de $\mathbb{P}^n_K \times \underbrace{\mathbb{P}^{n\,*}_K \times \cdots \times \mathbb{P}^{n\,*}_K}_{r+1 \text{ exemplaires}}$ (où $\mathbb{P}^{n\,*}_K$

désigne un espace dual à $\mathbb{P}^n_K$, ou autrement l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{P}^n_K$) définie par

$$(\underline{x}, \underline{u}_0, ..., \underline{u}_r) \in V_E \Leftrightarrow \underline{x} \in V \text{ et } \langle \underline{u}_i, \underline{x} \rangle = (u_{i0}x_0 + ... + u_{in}x_n) = 0 \ \forall i = 0, ..., r.$$

Géométriquement, cette variété contient exactement les points $(\underline{x}, \underline{u}_0, ..., \underline{u}_r) \in \mathbb{P}^n_K \times \mathbb{P}^{n\,*}_K \times \cdots \times \mathbb{P}^{n\,*}_K$ tels que $\underline{x} \in V$ et les formes $\underline{u}_0, \ldots, \underline{u}_r$ s'annulent en $\underline{x}$. Il est facile de voir avec le théorème de Bertini qu'en dehors d'un sous-ensemble fermé propre de

$$\underbrace{\mathbb{P}^{n\,*}_K \times ... \times \mathbb{P}^{n\,*}_K}_{r+1 \text{ exemplaires}}$$

l'intersection

$$V \cap \mathcal{V}(\underline{u}_0) \cap ... \cap \mathcal{V}(\underline{u}_{r-1})$$

est une variété 0-dimensionnelle (sur le corps de base $K(\underline{u}_0, ..., \underline{u}_{r-1})$, ou d'un autre point de vue forme une famille sur le corps de base K, paramétrée par les variables $\underline{u}_0, ..., \underline{u}_{r-1}$). Maintenant la condition que $\mathcal{V}(\underline{u}_r)$ passe par l'intersection $\underline{u}_0, ..., \underline{u}_{r-1}$ est équivalente à une relation algébrique pour les composantes de $\underline{u}_r$ sur le corps $K(\underline{u}_0, ..., \underline{u}_{r-1})$. Cette relation définit un idéal principal dans l'anneau $K[(1, \ldots, 1)]$ (cf. la notation introduite dans (1.2) ; remarquons que dans le cas projectif considéré on n'a qu'un seul degré égal à 1 pour toutes les formes et donc $d = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^{r+1}$). Tout générateur de cet idéal est appelé *une forme éliminante* (ou *une forme de Chow*). Elle est bien définie à multiplication par un élément de K^* près.

En changeant les hyperplans $\mathcal{V}(\underline{u}_0), \ldots, \mathcal{V}(\underline{u}_r)$ en des hypersurfaces de degrés $\deg \underline{u}_i = c_i$ (on considère $\underline{u}_i \in (\mathbb{P}^N_K)^*$ avec $N = \binom{c_i+n}{n}$), $i = 0, ..., r$ nous arrivons par la même procédure à *une forme éliminante* $F_{V,c_0,...,c_r}$ d'indice $(c_0, ..., c_r)$.

1.2 Degrés et hauteurs

Dans ce paragraphe nous rappelons les notions de degrés et hauteurs introduites dans les chapitres 5 et 7 de [32]. Mais nous adaptons ici les définitions du chapitre 7 au formalisme des corps avec une formule du produit.

1.2.1 Bi-degrés.

Ici nous nous restreignons au cas particulier de l'espace biprojectif $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$.

Définition 1.7. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $I \subset K[X] = K[X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, ..., X_n^{(2)}]$ un idéal bi-homogène. Nous notons $K[X]_{(a,b)}$ l'ensemble des polynômes bihomogènes de $K[X]$ de bi-degré (a, b) (où nous admettons toujours par convention $0 \in K[X]_{(a,b)}$).

En fait $K[X]_{(a,b)}$ est un espace vectoriel sur K (avec la somme et multiplication par des scalaires définies de façon évidente) et l'ensemble $I \cap K[X]_{(a,b)}$ en est un sous-espace.

La fonction (géométrique) de Hilbert est définie comme

$$H_g(I,(a,b)) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_K \left(K[X]_{(a,b)}/\left(I \cap K[X]_{(a,b)}\right)\right). \tag{1.5}$$

Il est connu (cf. p. 62 de [32]) que pour a, b suffisamment grands (et pour un I quelconque fixé) $H_g(I,(a,b))$ coïncide avec un polynôme dans $\mathbb{Q}[a,b]$. Nous notons ce polynôme, appelé *polynôme de Hilbert*, $\hat{H}_I(a,b)$.

Il est aussi connu (cf. le théorème 2.10 du chapitre 5 de [32]) que la partie dominante du polynôme $\hat{H}_I(a,b)$ est de la forme

$$r \cdot \mathrm{d}_{(1,r-1)}(I)ab^{r-1} + \mathrm{d}_{(0,r)}(I)b^r,$$

où $r = \dim I$. Les coefficients $\mathrm{d}_{(1,r-1)}(I)$ et $\mathrm{d}_{(0,r)}(I)$ sont égaux au nombre de points d'intersection de $\mathcal{V}(I)$ avec r hyperplans généraux de la forme $\mathbb{P}^1 \times H$ pour $\mathrm{d}_{(0,r)}(I)$ et $r-1$ de cette forme plus un de la forme $\{x\} \times \mathbb{P}^n$ pour $\mathrm{d}_{(1,r-1)}(I)$. En particulier, ces coefficients sont des entiers.

Nous allons appeler ces quantités les *degrés partiels* de l'idéal I.

Remarque 1.8. On peut donner en suivant la même procédure la définition de multidegré dans le cas multiprojectif, voir [32], chapitre 5. Dans le cas projectif on n'a qu'un seul degré partiel $\mathrm{d}_{(r)}$, dans ce cas nous le notons également deg.

Définition 1.9. Soit I un idéal bi-homogène de $K[X]$. Nous définissons le bi-degré de I comme

$$\underline{\deg}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathrm{d}_{(0,r)}(I), \mathrm{d}_{(1,r-1)}(I)\right).$$

Soit $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ une variété. Nous définissons

$$\underline{\deg}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\deg}(\mathcal{I}(W)).$$

Notons que l'on a la formule de décomposition (cf. la page 63 de [32])

$$\underline{\deg}(I) = \sum_{\substack{\mathcal{P} \in \mathrm{Spec} K[X] \\ \mathcal{P} \supset I \\ \mathrm{rg}(\mathcal{P}) = \mathrm{rg}(I)}} l(K[X]_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}})\underline{\deg}(\mathcal{P}). \tag{1.6}$$

On peut relier le degré de l'idéal (I, P) engendré par I et P, à celui de I lorsque I est un idéal bihomogène équidimensionnel de $K[X]$ et $P \in K[X]$ n'est contenu dans aucun premier associé à I.

Lemme 1.10. ([32], chapitre 5, lemme 2.11) *Si $\mathcal{P}$ est un idéal bihomogène premier de $K[X]$ et P un élément de $K[X]_{(a,b)}$ (bihomogène de multidegré (a,b)) n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{(1,\dim(\mathcal{P})-2)}((\mathcal{P},P)) &= b\cdot \mathrm{d}_{(1,\dim(\mathcal{P})-1)}(\mathcal{P}),\\ \mathrm{d}_{(0,\dim(\mathcal{P})-1)}((\mathcal{P},P)) &= a\cdot \mathrm{d}_{(1,\dim(\mathcal{P})-1)}(\mathcal{P})+b\cdot \mathrm{d}_{(0,\dim(\mathcal{P}))}(\mathcal{P}). \end{aligned}$$

Corollaire 1.11. *Si I est un idéal bihomogène équidimensionnel de $K[X]$ et P un élément de $K[X]_{(a,b)}$ (bihomogène de multidegré (a,b)) n'appartenant à aucun premier associé à I alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{(1,\dim(I)-2)}((I,P)) &= b\cdot \mathrm{d}_{(1,\dim(I)-1)}(I),\\ \mathrm{d}_{(0,\dim(I)-1)}((I,P)) &= a\cdot \mathrm{d}_{(1,\dim(I)-1)}(I)+b\cdot \mathrm{d}_{(0,\dim(I))}(I). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous utilisons d'abord la formule (1.6), puis à chaque terme dans la somme à droite nous appliquons le lemme 1.10.■

1.2.2 Hauteurs.

Nous reprenons notre corps commutatif infini K et nous supposons de plus qu'il est muni d'une famille de valeurs absolues $(|\cdot|_v)_{v\in\tilde{\mathcal{M}}_K}$ satisfaisant une formule du produit avec exposants $(n_v)_{v\in\tilde{\mathcal{M}}_K}$: $\prod_{v\in\tilde{\mathcal{M}}_K}|\alpha|_v^{n_v}=1$ pour tout $\alpha\in K\setminus\{0\}$, voir [23].

Si L est une extension finie de K on sait que les valeurs absolues de $\tilde{\mathcal{M}}_K$ s'étendent en une famille $\tilde{\mathcal{M}}_L$ de valeurs absolues sur L satisfaisant une formule du produit avec des exposants $(n_w)_{w\in\tilde{\mathcal{M}}_L}$: $\prod_{w\in\tilde{\mathcal{M}}_L}|\alpha|_w^{n_w}=1$ pour tout $\alpha\in L\setminus\{0\}$. On a de plus $\sum_{w|v}n_w=n_v[L:K]$ pour tout $v\in\tilde{\mathcal{M}}_K$.

Dans cette situation on sait définir une notion de hauteur pour différents objets définis sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K.

Exemple 1.1.

1. $K=\mathbb{Q}$, $\tilde{\mathcal{M}}_K=\{\text{nombres premiers}\}\cup\{\infty\}$. Si p est premier, $|\cdot|_p$ est égale à la valeur absolue p-adique (normalisée de sorte que $|p|_p=p^{-1}$) et $|\cdot|_\infty$ est égale à la valeur absolue archimédienne de $\mathbb{Q}$. La formule du produit découle dans ce cas du théorème fondamental de l'arithmétique.
2. $K=\Bbbk(\mathbf{z})$, où $\Bbbk$ désigne un corps commutatif algébriquement clos, et $\tilde{\mathcal{M}}_K=\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$. À tout élément $v\in\tilde{\mathcal{M}}_K$ associons la valeur absolue $\exp(-\mathrm{ord}_v)$. La formule du produit résulte dans ce cas de la factorisation unique des polynômes.

À une place v ultramétrique est naturellement associée une valuation ord_v, mais, par commodité, nous poserons pour toute valeur absolue $|\cdot|_v$ (ultramétrique ou archimédienne) $\mathrm{ord}_v\alpha:=-\log|\alpha|_v$ pour tout $\alpha\in K^*$.

Hauteurs des éléments. Rappelons d'abord la notion de *hauteur* d'un élément de $\overline{K}$. Soit donc $K \subset L$ une extension finie de corps. Soient $\tilde{\mathcal{M}}_L$ la famille des places de L étendant $\tilde{\mathcal{M}}_K$. Pour tout $v \in \tilde{\mathcal{M}}_L$ nous notons L_v le complété de L par rapport à v et $n_v \stackrel{\text{def}}{=} [L_v : K_v]$. Pour tout $\alpha \in L$ on pose

$$h_L(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{[L:K]} \sum_{v \in \tilde{\mathcal{M}}_L} n_v \min(0, \mathrm{ord}_v(\alpha)), \tag{1.7}$$

En fait cette définition ne dépend pas de l'extension L choisie : si $L \subset L' \subset \overline{K}$, $[L' : L] < +\infty$ et $\alpha \in L$ on a $h_{L'}(\alpha) = h_L(\alpha)$.

Plus généralement, soit $\alpha \in \mathbb{P}^n_{\overline{K}}$, on fixe un système de coordonnées $\underline{\alpha}$ de α et une extension finie L de K telles que toutes les composantes de $\underline{\alpha}$ appartiennent à cette extension. On pose

$$h(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{[L:K]} \sum_{v \in \tilde{\mathcal{M}}_L} n_v \min(\mathrm{ord}_v(\alpha_0), ..., \mathrm{ord}_v(\alpha_n)). \tag{1.8}$$

On vérifie que cette définition ne dépend ni du choix de $\underline{\alpha}$ ni de l'extension L. Pour $\alpha \in L$ on a $h_L(\alpha) = h(1 : \alpha)$.

Hauteurs des formes. Soit L une extension finie de K et soit $F \in L[\underline{u}^{(1)}, ..., \underline{u}^{(n)}]$ une forme multiprojective non nulle. Pour toute place non-archimédienne v de L nous notons $M_v(F)$, le maximum des valuations v-adiques des coefficients de F.

Pour tout place archimédienne v, d'après le théorème de Gelfand-Tornheim (voir [3], pages 45 et 67) il existe un plongement $\sigma_v : K_v \to \mathbb{C}$ tel que $|\alpha|_v = |\sigma_v(\alpha)|$, où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas nous posons $M_v(F) := M(\sigma_v(F))$, avec $M(\cdot)$ désignant la mesure rappelée dans [32], chap. 7, p. 97 :

$$\log M_v(\sigma_v(P)) = \int_{S_{n_1+1}(1) \times \cdots \times S_{n_r+1}(1)} \log |\sigma_v(F)| \sigma_{n_1+1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{n_r+1} + \sum_{i=1}^{r} \deg_{\underline{u}^{(i)}} F \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{2j}$$

où $S_{n+1}(1)$ désigne la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et σ_{n+1} la mesure de Haar normalisée de masse totale 1 sur $S_{n+1}(1)$.

Nous appelons alors *hauteur de la forme* F le nombre réel

$$h(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{[L:K]} \sum_{v \in \tilde{\mathcal{M}}_L} n_v \log M_v(F) \tag{1.9}$$

Complétons cette définition par $h(0) = 0$. Notons que l'on peut remplacer L par une extension finie sans changer la valeur de $h(\mathbf{F})$.

Pour tout cycle algébrique Z dans $\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$ (défini sur $\overline{K}$) et tout $\underline{d} \in (\mathbb{N}^*)^{\dim Z+1}$ nous définissons

$$h_{\underline{d}}(Z) \stackrel{\text{def}}{=} h(F_{Z,\underline{d}}), \tag{1.10}$$

où $F_{Z,\underline{d}}$ désigne une forme éliminante de Z d'indice $\underline{d}$. D'après la formule du produit cette définition ne dépend pas du choix de la forme éliminante de Z choisie.

Définition 1.12. Si $\underline{d} = (1, ..., 1)$, nous notons encore

$$h(Z) \stackrel{\text{def}}{=} h_{(1,...,1)}(Z)$$

et

$$\begin{aligned} d(Z) &= \frac{1}{\dim Z + 1} \deg_{\underline{u}} F_{Z,(1,...,1)} \\ t(Z) &= h(Z) + d(Z). \end{aligned}$$

Si $\underline{d} = (i_1, ..., i_r)$ (et Z est un cycle de dimension $r-1$) on a la formule

$$h_{\underline{d}}(Z) = i_1 \cdot \dots \cdot i_r \cdot h(Z)$$

(cf. le lemme 2.13 de [20]).

En particulier, si Z est un cycle 0-dimensionnel, on a (pour tout $D \in \mathbb{N}^*$)

$$h_D(Z) = D \cdot h(Z). \tag{1.11}$$

Une inégalité de la taille sur $\mathbb{k}(\mathbf{z})$. Soient $D \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif, $\mathbf{Q}$ un polynôme de degré D avec des coefficients dans $\mathbb{k}[\mathbf{z}]$ et $\mathbf{Z}$ un cycle dans $\mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{k}(\mathbf{z})}}$ défini sur $\mathbb{k}(\mathbf{z})$ et 0-dimensionnel.

Lorsque le cycle $\mathbf{Z}$ est défini sur $\mathbb{k}(\mathbf{z})$, une forme éliminante $\mathbf{F}_{\mathbf{Z},D}$ appartient à $\mathbb{k}(\mathbf{z})[\underline{u}]$ (et nous fixons pour le moment ce choix d'une forme éliminante d'indice D pour $\mathbf{Z}$).

Nous pouvons décomposer $\mathbf{F}_{\mathbf{Z},D} = \prod_{\beta\in\mathbf{Z}} \mathbf{F}_{\beta,D}$, où $\mathbf{F}_\beta = \sum_{|\underline{\alpha}|=D} u_\alpha \underline{\beta}^\alpha$, le produit étant pris sur tous les points de $\mathbf{Z}$ comptés avec leur multiplicité dans $\mathbf{Z}$. Nous choisissons le système $\underline{\beta}$ de coordonnées projectives de β de sorte que $M_v(\mathbf{F}_\beta) \geq 1$. C'est possible quitte à diviser β par une coordonnée β_{i_v} réalisant le minimum de $|\beta_i|_v$

Par spécialisation de tous les coefficients $u_{\underline{\alpha}}$ aux coefficients correspondants de $\mathbf{Q}$ nous obtenons, vu que les coefficients de $\mathbf{Q}$ appartiennent à $\mathbb{k}(\mathbf{z})$, que $\mathbf{F}_{\mathbf{Z},D}(\mathbf{Q})$ appartient à $\mathbb{k}(\mathbf{z})$:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Z},D}(\mathbf{Q}) = \prod_{\beta\in\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta}) \in \mathbb{k}(\mathbf{z}). \tag{1.12}$$

Pour tout valeur absolue $v \in \tilde{\mathcal{M}}_L$ (où L désigne une extension finie de $\mathbb{k}(\mathbf{z})$), qui ne prolonge pas la valeur absolue $\exp(\deg_{\mathbf{z}}(\cdot))$ de $\mathbb{k}(\mathbf{z})$, nous avons

$$-\mathrm{ord}_v(\mathbf{Q}(\underline{\beta})) \leq \log M_v\left(\sum_{|\underline{\alpha}|=D} u_\alpha \underline{\beta}^\alpha\right),$$

car tous les coefficients de $\mathbf{Q}$ appartient à $\mathbb{k}[\mathbf{z}]$. Par ailleurs, si $v \in \tilde{\mathcal{M}}_L$ prolonge la valeur absolue $\exp(-\deg_{\mathbf{z}}(\cdot))$ de $\mathbb{k}(\mathbf{z})$ on a

$$-\mathrm{ord}_v\left(\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right) \leq \log M_v\left(\sum_{|\underline{\alpha}|=D} u_\alpha \underline{\beta}^\alpha\right) + h(\mathbf{Q}).$$

Ainsi (pour une extension L de $\mathbb{k}(\mathbf{z})$ suffisamment grande),

$$\begin{aligned} h_L\left(\prod_{\beta\in\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta})\right) &= \frac{1}{[L:\mathbb{k}(\mathbf{z})]}\sum_{v\in\tilde{\mathcal{M}}_L} n_v \max\left(0, -\mathrm{ord}_v\left(\prod_{\beta\in\mathbf{Z}}\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{[L:\mathbb{k}(\mathbf{z})]}\sum_{v\in\tilde{\mathcal{M}}_L} n_v \max\left(0, \log M_v\left(\sum_{|\underline{\alpha}|=D} u_\alpha\underline{\beta}^\alpha\right)\right) + h(\mathbf{Q})\deg\mathbf{Z} \\ &\leq \frac{1}{[L:\mathbb{k}(\mathbf{z})]}\sum_{v\in\tilde{\mathcal{M}}_L} n_v \log M_v\left(\sum_{|\underline{\alpha}|=D} u_\alpha\underline{\beta}^\alpha\right) + h(\mathbf{Q})\deg\mathbf{Z} \\ &\leq h_D(\mathbf{Z}) + h(\mathbf{Q})\deg\mathbf{Z}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

(la deuxième inégalité vient du choix du système de coordonnées projectives $\underline{\beta}$).

Par ailleurs, vu (1.12), nous avons $\prod_{\beta\in\mathbf{Z}} Q(\underline{\beta}) \in \mathbb{k}(\mathbf{z})$ et donc

$$h_{\mathbb{k}(\mathbf{z})}\left(\prod_{\beta\in\mathbf{Z}}\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right) = -\sum_{v\in\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{k}(\mathbf{z})}} \min\left(0, \mathrm{ord}_v\left(\prod_{\beta\in\mathbf{Z}}\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right)\right),$$

qui implique pour toute valeur absolue $v_0 \in \tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{k}(\mathbf{z})}$ (avec une extension $v_0 \in \tilde{\mathcal{M}}_L$ fixée)

$$\begin{aligned} h\left(\prod_{\beta\in\mathbf{Z}}\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right) &\geq -\mathrm{ord}_{v_0}\left(\prod_{\beta\in\mathbf{Z}}\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right) \\ &\geq -\sum_{\beta\in\mathbf{Z}}\mathrm{ord}_{v_0}\left(\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

En collant (1.13) et (1.14) nous obtenons

$$h_D(\mathbf{Z}) + h(\mathbf{Q})\deg\mathbf{Z} \geq -\sum_{\beta\in\mathbf{Z}}\mathrm{ord}_{v_0}\left(\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right), \tag{1.15}$$

ou encore compte tenu de (1.11) et $D = \deg \mathbf{Q}$:

$$\deg(\mathbf{Q})h(\mathbf{Z}) + h(\mathbf{Q}) \deg \mathbf{Z} \geq -\sum_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathrm{ord}_{v_0}\left(\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right). \tag{1.16}$$

Également, vu (1.12), nous avons

$$\left(\prod_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta})\right)^{-1} \in \Bbbk(\mathbf{z}) \tag{1.17}$$

et alors

$$\begin{aligned} h_{\Bbbk(\mathbf{z})}\left(\prod_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta})\right) &= h_{\Bbbk(\mathbf{z})}\left(\left(\prod_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta})\right)^{-1}\right) \\ &= -\sum_{v \in \tilde{\mathcal{M}}_{\Bbbk(\mathbf{z})}} \min\left(0, \mathrm{ord}_v\left(\left(\prod_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta})\right)^{-1}\right)\right) \\ &= -\sum_{v \in \tilde{\mathcal{M}}_{\Bbbk(\mathbf{z})}} \min\left(0, -\mathrm{ord}_v\left(\prod_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta})\right)\right) \end{aligned}$$

et donc pour toute valeur absolue $v_0 \in \tilde{\mathcal{M}}_{\Bbbk(\mathbf{z})}$ (avec une extension $v_0 \in \tilde{\mathcal{M}}_L$ fixée)

$$\begin{aligned} h_{\Bbbk(\mathbf{z})}\left(\prod_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta})\right) &\geq \mathrm{ord}_{v_0}\left(\prod_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\underline{\beta})\right) \\ &\geq \sum_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathrm{ord}_{v_0}\left(\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right). \end{aligned} \tag{1.18}$$

En collant (1.13) et (1.18) nous obtenons

$$\deg \mathbf{Q} \cdot h(\mathbf{Z}) + h(\mathbf{Q}) \deg \mathbf{Z} \geq \sum_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathrm{ord}_{v_0}\left(\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right). \tag{1.19}$$

En résumant (1.16) et (1.19) nous obtenons

$$\deg(\mathbf{Q})h(\mathbf{Z}) + h(\mathbf{Q}) \deg(\mathbf{Z}) \geq \left|\sum_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathrm{ord}_{v_0}\left(\mathbf{Q}(\underline{\beta})\right)\right|, \tag{1.20}$$

pour $Q \in \Bbbk(\mathbf{z})$ et $\mathbf{Z}$ un cycle de dimension 0 défini sur $\Bbbk(\mathbf{z})$.

1.2.3 Quantités $\delta_0(I)$ et $\delta_1(I)$.

Nous désignons par $\Bbbk$ un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique quelconque et par $\mathcal{A}$ l'anneau de polynômes à coefficients dans $\Bbbk$ suivant : $\mathcal{A} = \Bbbk[X_0', X_1'][X_0, ..., X_n]$.

Il est important pour nous dans la suite de distinguer deux types d'objets. Les objets définis sur $\Bbbk$ et les objets définis sur des corps contenant $\Bbbk(\mathbf{z})$ par exemple $\Bbbk((\mathbf{z}))$ ou $\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}$.

Bien sûr, tout objet défini sur $\Bbbk$ peut être considéré comme un objet défini sur n'importe quel autre corps contenant $\Bbbk$ (la réciproque n'étant évidemment pas vraie). Dans ce mémoire nous explicitons ce changement de corps de base en utilisant la même lettre pour désigner des objets avant et après changement du corps de définition. Mais, pour souligner la différence au niveau du corps de définition nous utiliserons toujours des lettres grasses pour les objets définis sur $\Bbbk(\mathbf{z})$, ou plutôt considérés comme tels, tandis que les objets définis sur $\Bbbk$ seront désignés par des caractères normaux. Par exemple, dans la suite nous allons associer aux polynômes bi-homogènes $P \in \mathcal{A}$ des polynômes homogènes en $X_0, \ldots, X_n$ avec des coefficients en $\Bbbk[\mathbf{z}]$ par la formule $\mathbf{P}(X_0, \ldots, X_n) = P(1, \mathbf{z}, X_0, \ldots, X_n)$, et réciproquement associer aux polynômes de $\Bbbk[\mathbf{z}][X_0, \ldots, X_n]$ homogènes à coefficients dans $\Bbbk[\mathbf{z}]$ des polynômes de $\mathcal{A}$, en considérant $(1 : \mathbf{z})$ comme des coordonnées projectives et remplaçant ceci par $(X_0' : X_1')$.

Régulièrement dans la suite nous allons noter par $\underline{\mathbf{f}}$ un n-uplet de fonctions

$$\underline{\mathbf{f}} = (f_1(\mathbf{z}), ..., f_n(\mathbf{z})) \in \overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}^n$$

et par $\mathbf{f}$ le point correspondant de l'espace $\mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}}$ avec des coordonnées projectives

$$\mathbf{f} = (1 : f_1(\mathbf{z}) : ... : f_n(\mathbf{z})) \in \mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}}.$$

Nous notons aussi par $\tilde{\mathbf{f}}$ le point de l'espace $\mathbb{P}^1_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}} \times \mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}}$ de coordonnées projectives

$$\tilde{\mathbf{f}} = (1 : \mathbf{z}, 1 : f_1(\mathbf{z}) : ... : f_n(\mathbf{z})) \in \mathbb{P}^1_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}} \times \mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}}. \tag{1.21}$$

Définition 1.13. Nous notons $\mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{f}}}$ l'idéal bi-homogène des polynômes de $\mathcal{A}$ qui s'annulent en $\tilde{\mathbf{f}}$.

Remarque 1.14. Si $f_1(\mathbf{z})$,...,$f_n(\mathbf{z})$ sont algébriquement indépendantes sur $\Bbbk(\mathbf{z})$, alors $\mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{f}}} = (0)$.

Fixons des constantes

$$\nu_0 > 0, \quad \nu_1 \geq 0 \text{ et } \mu > 0. \tag{1.22}$$

Nous associons maintenant des entiers δ_0 et δ_1 à tout idéal bi-homogène $I \subset \mathcal{A} = K[X'_0, X'_1][X_0, \ldots, X_n]$ et tout point de $\left(\mathbb{P}^1_{\Bbbk((\mathbf{z}))} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk((\mathbf{z}))}\right) \setminus \mathcal{V}(I)$. En fait les quantités δ_0 et δ_1 que nous allons définir vont dépendre aussi des constantes ν_0, ν_1 et μ, mais pour alléger la notation nous ne préciserons pas cette dépendance.

Définition 1.15. a) Soit $I \subset \mathcal{A}$ un idéal bi-homogène et soit $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1 : \mathbf{z}; 1 : f_1(\mathbf{z}) : ... : f_n(\mathbf{z}))$ un point dans $\left(\mathbb{P}^1_{\Bbbk((\mathbf{z}))} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk((\mathbf{z}))}\right) \setminus \mathcal{V}(I)$.

Nous choisissons alors un polynôme bi-homogène $P \in I$, satisfaisant

$$P(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \neq \mathbf{0} \tag{1.23}$$

et qui minimise la quantité

$$\mu \mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg} I+1)} I \deg_{\underline{X}} P + \nu_0 \mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg} I)} I \deg_{\underline{X}'} P + \nu_1 \mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg} I)} I \deg_{\underline{X}} P \tag{1.24}$$

parmi des polynômes bi-homogènes satisfaisant (1.23). S'il existe plusieurs tels polynômes, nous en choisissons un avec $\deg_{\underline{X}'} P$ minimal. Nous notons $\delta_0(I, \underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \deg_{\underline{X}'} P$ et $\delta_1(I, \underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \deg_{\underline{X}} P$. Même si le choix du polynôme P n'est pas nécessairement unique, les entiers $\delta_0(I, \underline{\tilde{\mathbf{f}}})$ et $\delta_1(I, \underline{\tilde{\mathbf{f}}})$ sont bien définis avec toutes ces conditions.

b) Pour tout idéal bi-homogène $I \subset \mathcal{A}$ nous choisissons un polynôme bi-homogène $P \in I \setminus \{0\}$ qui minimise la quantité (1.24). S'il existe plusieurs polynômes bi-homogènes minimisant (1.24) nous choisissons un polynôme avec $\deg_{\underline{X}'} P$ minimal. Nous notons $\delta_0(I) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \deg_{\underline{X}'} P$ et $\delta_1(I) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \deg_{\underline{X}} P$.

c) Pour tout cycle Z (défini sur $\Bbbk$) dans l'espace $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ et tout point

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1 : \mathbf{z}; 1 : f_1(\mathbf{z}) : ... : f_n(\mathbf{z})) \in \left(\mathbb{P}^1_{\Bbbk((\mathbf{z}))} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk((\mathbf{z}))}\right) \setminus Z$$

nous posons $\delta_i(Z, \underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \delta_i(\mathcal{I}(Z), \underline{\tilde{\mathbf{f}}})$ et $\delta_i(Z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \delta_i(\mathcal{I}(Z))$, $i = 0, 1$.

Remarque 1.16. Dans le cas où $1, f_1(\mathbf{z}), ..., f_n(\mathbf{z})$ sont algébriquement indépendantes sur $\Bbbk(\mathbf{z})$, on a $\delta_i(I) = \delta_i(I, \underline{\tilde{\mathbf{f}}})$ pour $i = 0, 1$ et pour tout idéal I, car la condition (1.23) se ramène alors à choisir P non nul.

1.3 Ordres.

1.3.1 Définitions et premières propriétés

On reprend notre corps K (toujours commutatif et infini) et soit v une valuation sur K. Notons K_v la complétion de K par rapport à v.

Introduisons $\mathfrak{S}K[X][d]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $K[X]$ en les indéterminées $s^{(l)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}$ (où $1 \leq l \leq r$ et $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathcal{M}_{d_l}$) factorisé par tous les relations $s^{(l)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'} + s^{(l)}_{\mathfrak{m}',\mathfrak{m}} = 0$ ($1 \leq l \leq r$ et $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathcal{M}_{d_l}$) ; remarquons que en particulier on a $s^{(l)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}} = 0$.

Définissons un morphisme d'anneaux ∂ :

$$\begin{aligned} \partial : K[X][d] &\to \mathfrak{S}K[X][d] \\ u^{(l)}_{\mathfrak{m}} &\mapsto \sum_{\mathfrak{m}' \in \mathcal{M}_{d_l}} \binom{d_l}{\mathfrak{m}}^{1/2} \binom{d_l}{\mathfrak{m}'}^{1/2} s^{(l)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'} \mathfrak{m}' \end{aligned} \tag{1.25}$$

et lorsque $\underline{x} \in \left(K_v^{n_1+1} \setminus \{0\}\right) \times \cdots \times \left(K_v^{n_q+1} \setminus \{0\}\right)$ une évaluation

$$\begin{aligned} e_{\underline{x}} : K[X][d] &\to \mathfrak{S}K[X][d] \\ \mathfrak{m} &\mapsto \mathfrak{m}(\underline{x}) \end{aligned} \tag{1.26}$$

que nous étendons en $\mathfrak{S}K[X][d] \to \mathfrak{S}\overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}[d]$ par $e_{\underline{x}}(s^{(l)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}) = s^{(l)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}$.

Rappelons que la fonction M_v est définie au début du paragraphe "Hauteurs des formes", sur la page 31. Dans la définition suivante nous notons par α_d le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \alpha_d : K[d] & \to & \overline{K}[d] \\ u^{(l)}_{\mathfrak{m}} & \mapsto & \binom{d_l}{\mathfrak{m}}^{\frac{1}{2}} u^{(l)}_{\mathfrak{m}}. \end{array}$$

Définition 1.17. (Cf. la définition dans le paragraphe 4.2 du chapitre 7 de [32]). Soit V un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^{n_1}_{K_v} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_q}_{K_v}$, $d \in (\mathbb{N}^q)^{\dim V+1}$ et x un point fermé de $\mathbb{P}^{n_1}_{K_v} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_q}_{K_v}$. Posons

$$\mathrm{Ord}_d(x, V) = -\log\left(\frac{M_v(e_{\underline{x}} \circ \partial(F_{V,d}))}{M_v(\alpha_d(F_{V,d})) \prod_{l=1}^{\dim V+1} M_v(\alpha_{d_l}(U_l)(\underline{x}))^{\deg_{u^{(l)}} F_{V,d}}}\right)$$

où $F_{V,d}$ est une forme résultante d'indice d de V et $\underline{x}$ désigne un système de coordonnées projectives quelconque de x dans $\left(K_v^{n_1+1} \setminus \{0\}\right) \times \cdots \times \left(K_v^{n_q+1} \setminus \{0\}\right)$. Il est facile de vérifier que cette formule ne dépend ni du choix de $F_{V,d}$ ni de celui d'un système de coordonnées projectives pour $\underline{x}$.

On notera que la quantité $\mathrm{Dist}_d(\cdot,\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\mathrm{Ord}_d(\cdot,\cdot)\right)$ se comporte comme une distance :

Lemme 1.18. *Gardons la notation de la définition 1.17.*

a) Si $x \in V$, alors $\mathrm{Ord}_d(x, V) = \infty$.

b) Soit $d = (\delta, ..., \delta) \in ((\mathbb{N})^q)^{\dim V+1}$. Alors, $\mathrm{Ord}_d(x, V) = \infty$ *implique* $x \in V$.

Démonstration. Voir la discussion au bas de la page 118 de [32].

Signalons qu'en général il est possible que $\mathrm{Ord}_d(x,V) = \infty$ (i.e. $\mathrm{Dist}_d(x,V) = 0$) tandis que $x \notin V$ (voir la discussion à la page 119 de [32]).

Définition 1.19. Soit $\underline{x} \in \mathbb{A}^n_{K_v}$. Nous posons

$$\mathrm{ord}_v\, \underline{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{i=1,\dots,n} \mathrm{ord}_v\, x_i. \tag{1.27}$$

Définissons $\mathrm{ord}_v(x,y)$ pour $x,y \in \mathbb{P}^n_{K_v}$. Pour cela choisissons des coordonnées projectives $(x_0 : \dots : x_n)$ et $(y_0 : \dots : y_n)$ de $\underline{x}$ et $\underline{y}$ respectivement et posons

$$\mathrm{ord}_v(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\mathrm{ord}_v(\underline{x} \wedge \underline{y}) + \mathrm{ord}_v\underline{x} + \mathrm{ord}_v\underline{y}. \tag{1.28}$$

Cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées projectives (rappelons que par $\underline{x} \wedge \underline{y}$ nous désignons le $\frac{n(n-1)}{2}$-uplet $(x_i y_j - x_j y_i)_{0 \le i < j \le n}$).

Définition 1.20. Soit V une variété dans $\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$ et $x \in \mathbb{P}^n_{\overline{K}}$. Alors nous posons

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_v(x,V) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{y \in V_{\overline{K}}} \left(\mathrm{ord}_v(x,y)\right), \\ \mathrm{dist}(x,V) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp\left(-\mathrm{ord}_v(x,V)\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.2. Si $V = \{\alpha\}$ est juste un point on a

$$\mathrm{Ord}_v(x,\{\alpha\}) = \mathrm{ord}_v(x,\{\alpha\}) = \mathrm{ord}_v(x,\alpha).$$

Nous noterons également $\mathrm{Ord}_v(x,\alpha)$ pour $\mathrm{Ord}_v(x,\{\alpha\})$.

Nous allons aussi utiliser ces notations avec des idéaux au lieu des variétés. Par exemple, nous utiliserons la notation $\mathrm{ord}_v(x,I)$ (où I est un idéal) pour désigner $\mathrm{ord}_v(x,\mathcal{V}(I))$

Définition 1.21. Si le choix de la place v ne cause pas de confusion, nous noterons également $\mathrm{ord}_x(V)$ pour $\mathrm{ord}_v(x,V)$, où $V \subset \mathbb{P}^n_{\overline{K_v}}$ désigne une sous-variété de $\mathbb{P}^n_{\overline{K_v}}$, et $\mathrm{ord}_x(I)$ pour $\mathrm{ord}_v(x,I)$ (i.e. pour $\mathrm{ord}_v(x,\mathcal{V}(I))$), où I désigne un idéal homogène de $\overline{K_v}[\underline{X}]$.

Par exemple, dans cette thèse nous appliquerons tout particulierement la valuation $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}$ aux objets définis sur $\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}$. Nous utiliserons alors la notation décrite dans la définition 1.21, sous-entendant cette valuation $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}$ fixee.

Soulignons ici que Ord et ord (et également Dist et dist) désignent des quantités différentes. Les quantités Ord (et Dist) sont définies avec la forme de Chow et elles mesurent la moyenne de la distance entre un point x et les points d'une variété V, tandis que $\mathrm{ord}_v(x,V)$ est la distance minimale entre x et un point de V. Par exemple pour une variété 0-dimensionnelle Ord désigne la somme des $\mathrm{ord}_v(x,\alpha)$ où α parcourt tous les points de V.

Ainsi, Ord prend en compte la structure algébrique de V, tandis que ord mesure la distance plutôt au sens ensembliste.

Nous établissons maintenant un lemme que nous utiliserons aux chapitres 2 et 4.

Lemme 1.22. *Soient* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}}$ *deux points de l'espace projectif.*

a) Soient $\underline{\mathbf{x}}$ *un système de coordonnées projectives de* $\mathbf{x}$ *et* $\underline{\mathbf{y}}$ *un système de coordonnées projectives de* $\mathbf{y}$ *satisfaisant*

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{y}}.$$

Alors

$$\mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}) - \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}}. \tag{1.29}$$

b) Supposons $\mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$*, si nous fixons pour* $\mathbf{y}$ *un système de coordonnées projectives* $\underline{\mathbf{y}}$ *dans* $\overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}^{n+1}$*, alors il existe un système de coordonnées projectives* $\underline{\mathbf{x}} \in \overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}^{n+1}$ *de* $\mathbf{x}$ *satisfaisant*

$$\begin{array}{ll} \alpha) & \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{y}}, \\ \beta) & \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}) - \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{y}}) = \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{array} \tag{1.30}$$

Démonstration. a) Si nous multiplions simultanément $\underline{\mathbf{x}}$ et $\underline{\mathbf{y}}$ par $\mathbf{z}^C$, cela ne change pas (1.29) ni à gauche, ni à droite. Ainsi il suffit d'établir (1.29) en supposant

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{y}} = 0.$$

Maintenant, vu la formule $x_i y_j - x_j y_i = (x_i - y_i) y_j - (x_j - y_j) y_i$, on a

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_i \mathbf{y}_j - \mathbf{x}_j \mathbf{y}_i) \geq \min\left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i), \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j)\right),$$

d'où le résultat.

b) Considérons d'abord le cas

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{y}} = 0. \tag{1.31}$$

Supposons, sans perte de généralité, $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{y}_0) = 0$. Choisissons un système de coordonnées projectives $\underline{\mathbf{x}} \in \overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}^{n+1}$ de $\mathbf{x}$ tel que $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_0) = 0$. Quitte à multiplier par des éléments d'ordre zéro en $\mathbf{z} = 0$ nous pouvons supposer

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 = 1. \tag{1.32}$$

En fait on a nécessairement

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} = 0 \tag{1.33}$$

car sinon il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{x}_j = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} < 0$, donc

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_0 \mathbf{y}_j - \mathbf{x}_j \mathbf{y}_0) = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{x}_j = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} < 0,$$

puis

$$\mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{0\le i<j\le n}(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_j\mathbf{y}_i)) - \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} \le 0$$

contredisant l'hypothèse $\mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0$.

Comme $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{y}} = 0$,

$$\mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{i,j=0,1,\ldots,n}\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_j\mathbf{y}_i),$$

et on en déduit (vu (1.31), (1.32) et (1.33))

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}) &= \min_{i=0,1,\ldots,n}\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i)\\ &= \min_{i=0,1,\ldots,n}\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\mathbf{y}_i) \ge \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}) \ge \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ et par le point (a), $\mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ge \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}})$, donc on a l'égalité

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}) = \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

si $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{y}} = 0$.

Passons au cas général. Soit donc $\underline{\mathbf{y}'}$ un système de coordonnées projectives de $\mathbf{y}$ satisfaisant $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{y}'} = C$. Posons $\underline{\mathbf{y}} = \frac{1}{\mathbf{z}^C}\underline{\mathbf{y}'}$. Comme $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{y}} = 0$ et vu la démonstration précédente il existe un système de coordonnées projectives $\underline{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$ tel que

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}) - \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{y}}) = \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Il suit immédiatement que

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{z}^C\underline{\mathbf{x}} - \mathbf{z}^C\underline{\mathbf{y}}) - \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{z}^C\underline{\mathbf{y}}) = \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

et nous concluons en posant $\underline{\mathbf{x}'} = \mathbf{z}^C\underline{\mathbf{x}}$.■

1.3.2 Une propriété de δ_0 et δ_1

Lemme 1.23. *Fixons un point*

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1 : \mathbf{z}, 1 : f_1(\mathbf{z}) : \ldots : f_n(\mathbf{z})) \in \mathbb{P}^1_{\Bbbk[[\mathbf{z}]]} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk[[\mathbf{z}]]}$$

et considérons une suite de cycles $Z_i \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ définis sur $\Bbbk$ et tels que $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} \notin Z_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$. Si $\mathrm{ord}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}, Z_i)$ tend vers $+\infty$, alors $\max(\delta_0(Z_i, \underline{\tilde{\mathbf{f}}}), \delta_1(Z_i, \underline{\tilde{\mathbf{f}}}))$ tend vers l'infini avec i.

Démonstration. Notons $T_N(g(\mathbf{z}))$ le vecteur des coefficients du développement de Taylor de la fonction $g(\mathbf{z})$ jusqu'à l'ordre N.

Ad absurdum, supposons qu'il existe $l_0, l_1 < +\infty$ tels qu'il existe une suite strictement croissante $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres naturels et une suite de cycles $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} \notin Z_i$, $\delta_j(Z_i, \underline{\tilde{\mathbf{f}}}) = l_j$, $j = 0, 1$, et

$$\mathrm{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} Z_i \geq N_i. \tag{1.34}$$

Par définition de $\delta_j(Z_i, \underline{\tilde{\mathbf{f}}})$, $j = 0, 1$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme $P_i \in \mathcal{A}_{(l_0,l_1)}$ (où $\mathcal{A}_{(l_0,l_1)}$ désigne l'ensemble de polynômes de $\mathcal{A}$ de degrés au plus l_0 en $\underline{X}'$ et au plus l_1 en $\underline{X}$) satisfaisant

$$P_i(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \neq \mathbf{0}, \tag{1.35}$$

$$P_i \in \mathcal{I}(Z_i). \tag{1.36}$$

Les relations (1.34) et (1.36) impliquent $\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0} P_i(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \geq N_i$, $i \in \mathbb{N}$, ou ce qui revient au même

$$T_{N_i}(P_i(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) = \underline{0}. \tag{1.37}$$

Notons $Y = \mathcal{A}_{(l_0,l_1)} / \left(\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} \cap \mathcal{A}_{(l_0,l_1)}\right)$ et $M \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_g(\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}, (l_0, l_1)) = \dim_{\Bbbk} Y$ (pour la notation $\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}$, voir la définition 1.13). Fixons une base $B = (y_1, ..., y_M)$ de $\mathcal{A}_{(l_0,l_1)} / \left(\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} \cap \mathcal{A}_{(l_0,l_1)}\right)$ et définissons une application

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(l_0,l_1)} / \left(\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} \cap \mathcal{A}_{(l_0,l_1)}\right) &\to \Bbbk[[\mathbf{z}]] \\ x &\mapsto x(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \end{aligned}$$

comme suit. Pour tout élément $x \in \mathcal{A}_{(l_0,l_1)} / \left(\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} \cap \mathcal{A}_{(l_0,l_1)}\right)$ choisissons un représentant a_x dans $\mathcal{A}_{(l_0,l_1)}$. La série formelle $a_x(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \in \Bbbk[[\mathbf{z}]]$ ne dépend pas du choix de représentant a_x car si b_x est encore un représentant de x, alors $a_x - b_x \in \mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}$ et donc $a_x(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) - b_x(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) = \mathbf{0}$. Nous posons $x(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_x(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})$.

Soit N un entier positif. Notons F_N l'espace vectoriel engendré par les $T_N(y_j(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}))$ où y_j parcours l'ensemble B. Soit $p_N : Y \to F_N$ l'application linéaire définie sur Y par $y \to T_N(y(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}))$.

Maintenant (1.35) et (1.37) impliquent que pour la suite strictement croissante $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres naturels on a un noyau non-trivial de p_{N_i}. Évidemment on a l'inclusion $\ker p_{N_i} \subset \ker p_{N_j}$ pour $N_i > N_j$, et nous avons donc une chaîne infinie d'espaces vectoriels emboîtés :

$$\ker p_{N_0} \supset \ker p_{N_1} \supset \ker p_{N_2} \supset \ker p_{N_3} \supset ...$$

Chaque inclusion stricte dans cette chaîne

$$\ker p_{N_i} \supsetneq \ker p_{N_{i+1}}, \tag{1.38}$$

entraîne

$$\dim_{\Bbbk} \ker p_{N_i} \leq \dim_{\Bbbk} \ker p_{N_{i+1}} - 1. \tag{1.39}$$

Dans le même temps

$$\dim \ker p_{N_0} \leq M = \dim_{\Bbbk} \mathcal{A}_{(l_0,l_1)} / \left(\mathcal{P}_{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}} \cap \mathcal{A}_{(l_0,l_1)} \right) < +\infty$$

donc on ne peut avoir l'inégalité (1.39) qu'un nombre fini de fois, et *a fortiori* on a seulement un nombre fini d'inclusions strictes (1.38). Ainsi il existe un indice s tel que

$$\ker p_{N_s} = \ker p_{N_{s+1}} = \ker p_{N_{s+2}} = \ldots = p_{N_{s+i}} = \ldots$$

Par suite

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} \ker p_{N_i} = \ker p_{N_s} \neq 0, \tag{1.40}$$

car $\ker p_{N_i} \neq 0$ par le choix de la suite (N_i) (cf. (1.35) et (1.37)).

D'un autre côté pour tout élément x de $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \ker p_{N_i}$ on a $x(\tilde{\underline{\mathbf{f}}}) = \mathbf{0}$, donc tout représentant dans $\mathcal{A}_{(l_0,l_1)}$ appartient à $\mathcal{P}_{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}}$ ce qui entraîne $x = 0$ en tant qu'élément de $\mathcal{A}_{(l_0,l_1)} / \left(\mathcal{P}_{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}} \cap \mathcal{A}_{(l_0,l_1)} \right)$ et donc

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} \ker p_{N_i} = 0. \tag{1.41}$$

La contradiction obtenue entre (1.40) et (1.41) montre que l'hypothèse initiale sur $l_0, l_1 < +\infty$ est fausse ce qui achève de montrer le lemme 1.23.■

Corollaire 1.24. *Il existe une constante C_{sg} qui ne dépend que de $\tilde{\underline{\mathbf{f}}} = (1 : \mathbf{z}, 1 : f_1(\mathbf{z}) : \ldots : f_n(\mathbf{z})) \in \mathbb{P}^1_{\Bbbk[[\mathbf{z}]]} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk[[\mathbf{z}]]}$ telle que si un cycle $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ (définie sur $\Bbbk$) ne contient pas $\tilde{\underline{\mathbf{f}}}$ et satisfait $\mathrm{ord}_{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}} Z \geq C_{sg}$, alors soit $\delta_0(Z, \tilde{\underline{\mathbf{f}}}) \geq 2n! + 1$, soit $\delta_1(Z, \tilde{\underline{\mathbf{f}}}) \geq 4n$.*

Démonstration. C'est un corollaire direct du lemme 1.23.■

1.4 Le lemme de transfert et ses conséquences

Comme dans (1.22), fixons dans ce paragraphe des constantes

$$\nu_0 > 0, \quad \nu_1 \geq 0 \text{ et } \mu > 0.$$

On va utiliser le lemme de transfert multiprojectif de [43] dont on rappelle l'énoncé, spécialisé à notre cas. Dans la suite nous notons

$$c_n = 2^{n+1}(n+2)^{(n+1)(n+3)}. \tag{1.42}$$

Remarquons que dans la notation de [43] on ait $c_n = c_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n}$.

Théorème 1.25. *(Lemme de transfert $(1,n)$-projectif). Soit $\underline{\mathbf{f}} \in \mathbb{P}^n_{\Bbbk[[\mathbf{z}]]}$ et C un réel satisfaisant*

$$C \geq (\min(\nu_0, \mu)^n)^{-1}. \tag{1.43}$$

Si une forme $\mathbf{P} \in \Bbbk[\mathbf{z}][X_0, X_1, ..., X_n]$*, non nulle, satisfait*

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{P}(\underline{\mathbf{f}})) - \deg \mathbf{P} \cdot \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{f}}) - h(\mathbf{P}) \\ &\qquad > C \cdot n \cdot ((\mu + \nu_0)(h(\mathbf{P}) + 1) + \nu_1 \deg \mathbf{P})\, \mu^{n-1} (\deg \mathbf{P} + 1)^n, \end{aligned} \tag{1.44}$$

alors il existe un cycle irréductible $\mathbf{Z} \in \mathbb{P}_n\left(\overline{\Bbbk(\mathbf{z})}\right)$ *défini sur* $\Bbbk(\mathbf{z})$*, de dimension 0, contenu dans le lieu des zéros de* $\mathbf{P}$*, satisfaisant*

$$\begin{aligned} &\nu_0 \deg \mathbf{Z} \cdot h(\mathbf{P}) + \nu_1 \deg \mathbf{Z} \cdot \deg \mathbf{P} + \mu \cdot h(\mathbf{Z}) \cdot \deg \mathbf{P} \\ &\qquad \leq c_n C (n+1) \mu^n (\nu_0 (h(\mathbf{P}) + 1) + \nu_1 \deg \mathbf{P}) (\deg \mathbf{P} + 1)^n, \end{aligned} \tag{1.45}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}(\alpha) >& c_n^{-1} \left[(c_n C)^{\frac{1}{n}} (\nu_0 (h(\mathbf{P}) + 1) + \nu_1 \deg \mathbf{P})\right] \deg(\mathbf{Z}) \\ &+ c_n^{-1} \left[(c_n C)^{\frac{1}{n}} \mu (\deg \mathbf{P} + 1)\right] h(\mathbf{Z}). \end{aligned} \tag{1.46}$$

En particulier, (1.43) et (1.46) impliquent

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\alpha}) > C^{\frac{1}{n}} c_n^{-\frac{n-1}{n}} \Big(& \nu_0 \deg(\mathbf{Z}) h(\mathbf{P}) + \nu_1 \deg(\mathbf{Z}) \deg \mathbf{P} \\ &+ \mu \cdot h(\mathbf{Z}) \deg \mathbf{P}\Big). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Démonstration. Nous appliquons le corollaire 11 de [43] à $\tilde{X}_0 = \mathcal{V}(\mathbf{P})$ et $\tilde{\Phi} = \tilde{\underline{\mathbf{f}}}$ avec

$$\begin{aligned} \eta &= \left[(c_n C)^{\frac{1}{n}} (\nu_0 (h(\mathbf{P}) + 1) + \nu_1 \deg \mathbf{P})\right], \\ \delta &= \left[(c_n C)^{\frac{1}{n}} \mu (\deg \mathbf{P} + 1)\right]. \end{aligned}$$

L'inégalité (1.43) implique

$$\begin{aligned} h(\mathbf{P}) &\leq \eta \\ \deg \mathbf{P} &\leq \delta, \end{aligned} \tag{1.48}$$

donc $\tilde{X}_0$ est définie par une forme de multidegré $\leq (\eta, \delta)$ avec

$$(\eta, \delta) \geq (c_n^{1/n}, c_n^{1/n}).$$

Dans notre cas $c_n = c_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n}$ et

$$\deg\left(\tilde{X}_0; (\eta, \delta)\right) = h(\mathbf{P}) \cdot \delta^n + n \cdot \deg \mathbf{P} \cdot \eta \delta^{n-1}. \tag{1.49}$$

La condition

$$\mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}} \tilde{X}_0 \geq c_n^{-1} \deg\left(\tilde{X}_0; (\eta, \delta)\right)$$

est donné par (1.44), car

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}\tilde{X}_0 &= \mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathbf{P} = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{P}(\underline{\mathbf{f}})) - \deg_{\underline{X}} \cdot \mathbf{P} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{f}}) - h(\mathbf{P}) \\
&> C \cdot n \cdot \Big((\mu + \nu_0)\,(h(\mathbf{P}) + 1) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} \mathbf{P} \Big)\, \mu^{n-1} \left(\deg_{\underline{X}} \mathbf{P} + 1\right)^n \\
&> c_n^{-1} \cdot n \cdot (c_n C) \Bigg(\Big(\nu_0(h(\mathbf{P}) + 1) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} \mathbf{P}\Big)\, \mu^{n-1} \left(\deg_{\underline{X}} \mathbf{P} + 1\right)^n \\
&\quad + (h(\mathbf{P}) + 1)\mu^n \left(\deg_{\underline{X}} \mathbf{P} + 1\right)^n \Bigg) \\
&> c_n^{-1} \Big(n \cdot \eta \delta^{n-1} \deg_{\underline{X}} \mathbf{P} + \delta^n h(\mathbf{P}) \Big) \\
&> c_n^{-1} \deg \left(\tilde{X}_0; (\eta, \delta)\right).
\end{aligned}$$

La conclusion du corollaire 11 de [32] nous donne exactement la conclusion du théorème. En effet, le corollaire nous fournit un cycle $\mathbf{Z} \subset \tilde{X}_0(\overline{\mathbb{k}(\mathbf{z})})$ défini sur $\mathbb{k}(\mathbf{z})$ et de dimension 0 tel que

$$\delta \cdot h(\mathbf{Z}) + \eta \deg \mathbf{Z} \quad \leq \quad \deg \left(\tilde{X}_0, (\eta, \delta)\right), \tag{1.50}$$

$$\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\alpha}) \quad > \quad c_n^{-1} \left(\eta \deg \mathbf{Z} + \delta \cdot h(\mathbf{Z})\right). \tag{1.51}$$

L'estimation (1.50) (avec (1.48) et (1.49)) nous donne l'inégalité (1.45) et l'estimation (1.51) nous donne directement (1.46).■

Définition 1.26. Soit C un réel satisfaisant (1.43). Dans la suite nous associons, grâce au lemme de transfert, à tout polynôme homogène $\mathbf{P} \in \mathbb{k}[\mathbf{z}][X_1, ..., X_n]$ satisfaisant (1.44) un cycle irréductible 0-dimensionnel $\mathbf{Z}_C(\mathbf{P})$ défini sur $\mathbb{k}(\mathbf{z})$, contenu dans le lieu des zéros de P et satisfaisant les inégalités (1.45) et (1.46). S'il existe plusieurs tels cycles, nous en choisissons un.

Remarque 1.27. En considérant $(1 : \mathbf{z})$ comme les coordonnées d'un point de $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{k}(\mathbf{z})}}$ nous pouvons considérer le cycle $\mathbf{Z}$ comme un cycle 1-dimensionnel dans $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{k}}$ (défini sur $\mathbb{k}$). Dans ce cas nous le notons $\mathcal{Z}_C(P)$.

À un polynôme $P(X_0', X_1', X_0, X_1, ..., X_n) \in \mathcal{A}$ bi-homogène satisfaisant

$$\frac{\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P(1, \mathbf{z}, \underline{\mathbf{f}}) - (\deg_{\underline{X}} P)\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{f}}) - \deg_{\underline{X}'} P}{n((\nu_0 + \mu)(\deg_{\underline{X}'} P + 1) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} P)\mu^{n-1}(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n} > C, \tag{1.52}$$

nous associons le polynôme homogène

$$\mathbf{P}(X_0, X_1, ..., X_n) = P(1, \mathbf{z}, X_0, X_1, ..., X_n)$$

(satisfaisant alors (1.44)) auquel les cycles $\mathbf{Z}_C(\mathbf{P})$ et $\mathcal{Z}_C(\mathbf{P})$ sont associés. Par cette procédure nous associons donc également des cycles $\mathbf{Z}_C(P)$ et $\mathcal{Z}_C(P)$ à tout polynôme bi-homogène $P \in \mathcal{A}$ satisfaisant (1.52).

Remarque 1.28. Notons qu'en combinant (1.52) (pour C assez grand) avec le lemme de transfert (thórème 1.25, (1.46)) on montre que le cycle $\mathcal{Z}_C(P)$ n'est pas isotrivial (et donc $\mathbf{Z}_C(P)$ n'est pas défini sur $\Bbbk$). En fait c'est facile de préciser la minoration pour C qui assure que $\mathcal{Z}_C(P)$ n'est pas isotrivial. Tout point défini sur $\Bbbk$ contribue au maximum par $\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}\left(\underline{\tilde{\mathbf{f}}} \wedge \underline{\mathbf{f}}(0)\right)$ à $\mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{Z}_C(P)$, donc pour des cycles isotriviaux Z on a toujours l'estimation

$$\mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}} Z \leq \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}\left(\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) \wedge \underline{\mathbf{f}}(0)\right) \deg Z.$$

Ainsi

$$C > C_{\text{iso}} := \left(\frac{c_n \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}\left(\underline{\mathbf{f}} \wedge \underline{\mathbf{f}}(0)\right) + 1}{\min(\nu_0, \mu)}\right)^n$$

implique que $\mathcal{Z}_C(P)$ n'est pas isotrivial.

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.29. *Soit* $\underline{\mathbf{f}} = (1 : \mathbf{f}_1 : ... : \mathbf{f}_n) \in \mathbb{P}^n_{\Bbbk[[\mathbf{z}]]}$ *tel que* $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$,...,$\mathbf{f}_n$ *soient algébriquement indépendantes sur* $\Bbbk(\mathbf{z})$*. Soient* $\mathbf{P} \in \Bbbk[\mathbf{z}][X_0, ..., X_n]$ *un polynôme homogène non nul satisfaisant (1.44) avec*

$$C \geq \max\left(\left(3/\min(\nu_0, \mu)\right)^n (n!)^n c_n^{n-1}, \left(\frac{c_n C_{sg} + 1}{\min(\nu_0, \mu)}\right)^n, C_{iso}\right) \tag{1.53}$$

(où C_{sg} *est la constante du corollaire 1.24). Soit* $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_C(\mathbf{P})$ *et soit* $\mathbf{P}_0 \in \Bbbk[\mathbf{z}][X_0, ..., X_n]$ *un polynôme homogène en* $\underline{X}$*, non nul, s'annulant sur* $\mathbf{Z}$ *et réalisant le minimum de la quantité*

$$\nu_0 \cdot h(\mathbf{Z})h(\mathbf{Q}) + \nu_1 \cdot \deg \mathbf{Z} \cdot h(\mathbf{Q}) + \mu \cdot h(\mathbf{Z}) \deg_{\underline{X}} \mathbf{Q} \tag{1.54}$$

sur tous les polynômes homogènes $\mathbf{Q} \in \Bbbk[\mathbf{z}][X_0, ..., X_n]$ *non nuls s'annulant sur* $\mathbf{Z}$.

Notons $\delta_0 = h(\mathbf{P}_0)$ *et* $\delta_1 = \deg_{\underline{X}} \mathbf{P}_0$.

Alors, il existe un point $\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}$ *satisfaisant*

$$\mathrm{Ord}(\underline{\mathbf{f}}, \underline{\alpha}) > \tilde{C}(\delta_0 + 1)(\delta_1 + 1)^n, \tag{1.55}$$

où $\tilde{C} = C^{\frac{1}{n}} \min(\nu_0, \mu)\left(3 \cdot n! \cdot c_n^{\frac{n-1}{n}}\right)^{-1}$.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons qu'il existe un point $\underline{\alpha}_1 \in \mathbf{Z}_C(\mathbf{P})$ satisfaisant

$$\mathrm{Ord}(\underline{\alpha}_1, \underline{\mathbf{f}}) \geq C_{sg}. \tag{1.56}$$

En effet, par la minoration (1.46) il existe un point $\underline{\alpha}_1 \in \mathbf{Z}_C(\mathbf{P})$ satisfaisant $\mathrm{Ord}(\underline{\alpha}_1, \underline{\mathbf{f}}) \geq c_n^{-1}\left[(c_n C)^{\frac{1}{n}} \nu_0\right]$ et nous en déduisons (1.56) avec l'hypothèse (1.53).

Ainsi au vu du corollaire 1.24 nous pouvons supposer que

$$\delta_0 \geq 2 \cdot n! + 1 \text{ ou } \delta_1 \geq 4n. \tag{1.57}$$

Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Par l'algèbre linéaire on peut construire un polynôme bi-homogène $Q_{(a,b)} = Q_{(a,b)}(X'_0, X'_1, X_0, X_1, ..., X_n) \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ de bi-degré (a,b) et d'ordre d'annulation en $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1, \mathbf{z}, \underline{\mathbf{f}})$ satisfaisant $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} Q_{(a,b)}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \geq \lfloor \frac{1}{n!}(a+1)(b+1)^n \rfloor$.
Posons

$$(a,b) = \begin{cases} (\delta_0 - 1, \delta_1), & \text{si } \delta_0 \geq 2 \cdot n! + 1, \\ (\delta_0, \delta_1 - 1), & \text{sinon, i.e. } \delta_1 \geq 4n \text{ au vu de (1.57)}. \end{cases} \tag{1.58}$$

Montrons pour ce choix de (a,b) l'inégalité

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} Q_{(a,b)}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) > \frac{1}{2 \cdot n!}(\delta_0 + 1)(\delta_1 + 1)^n. \tag{1.59}$$

Vu (1.58), il suffit de considérer deux cas :

a) $\delta_0 \geq 2 \cdot n! + 1$,

b) $\delta_1 \geq 4n$.

Par construction de $Q_{(a,b)}$ nous avons

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} Q_{(a,b)}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \geq \lfloor \frac{1}{n!}(a+1)(b+1)^n \rfloor > \frac{1}{n!}(a+1)(b+1)^n - 1. \tag{1.60}$$

Dans le cas a) on se ramène alors à

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} Q_{(a,b)}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \geq \frac{1}{n!}\left(\delta_0(\delta_1 + 1)^n - n!\right) \tag{1.61}$$

et afin de démontrer (1.59) il suffit de vérifier

$$2\delta_0(\delta_1 + 1)^n - 2 \cdot n! \geq (\delta_0 + 1)(\delta_1 + 1)^n \tag{1.62}$$

qui est évidemment vrai pour $\delta_0 \geq 2 \cdot n! + 1$ (et $\delta_1 \geq 0$).

Dans le cas b) en utilisant la même procédure, nous arrivons au point où il nous suffit de vérifier (au lieu de (1.62))

$$2(\delta_0 + 1)\delta_1^n - 2 \cdot n! \geq (\delta_0 + 1)(\delta_1 + 1)^n. \tag{1.63}$$

Nous pouvons réécrire cette dernière inégalité comme

$$\left(2\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 + 1}\right)^n - 1\right)(\delta_0 + 1) \geq \frac{2 \cdot n!}{(\delta_1 + 1)^n}. \tag{1.64}$$

Dans cette dernière inégalité la partie de côté gauche est une fonction croissante de δ_0 et δ_1, et la partie du côté droit est une fonction décroissante de δ_1. Donc si cette inégalité n'est pas vraie pour toutes les valeurs $\delta_0 \geq 0$ et $\delta_1 \geq 4n$, alors elle doit être fausse au moins pour $\delta_0 = 0$ et $\delta_1 = 4n$. Mais dans ce dernier cas il est facile à vérifier directement

$$2\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n (0+1) > 1/2 > \frac{2 \cdot n!}{(4n+1)^n} \tag{1.65}$$

et ainsi l'inégalité (1.63) est vraie pour toutes valeurs $\delta_0 \geq 0$, $\delta_1 \geq 2n$. Ceci achève la démonstration de l'inégalité (1.59).

Notons
$$\mathbf{Q}(X_0, ..., X_n) = Q_{(a,b)}(1, \mathbf{z}, X_0, ..., X_n)^q,$$
où $q = \lceil 2 \cdot n! \tilde{C} \rceil$ de sorte que $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} Q_{(a,b)}(1, \mathbf{z}, 1, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n)^q \geq \tilde{C}(\delta_0 + 1)(\delta_1 + 1)^n$. Comme les composantes de $\underline{\mathbf{f}}$ sont algébriquement indépendantes sur $\Bbbk(\mathbf{z})$, on a $\mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}}) \neq 0$.

Il est facile de vérifier
$$h(\mathbf{Q}) \leq \deg_{\underline{X}'} Q_{(a,b)} = a,$$
$$\deg_{\underline{X}} \mathbf{Q} = \deg_{\underline{X}} Q_{(a,b)} = b.$$

Dans le même temps on a évidemment
$$\deg \mathbf{Z} \geq 1$$
et, comme $\mathbf{Z}$ n'est pas défini sur $\Bbbk$ (cf. la remarque 1.28), on a
$$h(\mathbf{Z}) \geq 1.$$

Donc, vu (1.58), le polynôme $\mathbf{Q}$ rend la quantité (1.54) strictement plus petite que le minimum réalisé par $\mathbf{P}_0$. Ainsi il ne peut s'annuler sur $\mathbf{Z}$ par définition de $\mathbf{P}_0$, ou autrement dit : $\mathbf{Q}$ n'appartient pas à $\mathcal{I}(\mathbf{Z})$.

On applique le théorème 4.11 du chapitre 3 de [32] au polynôme $\mathbf{Q}(X_0, ..., X_n)$ et à l'idéal $\mathcal{I}(\mathbf{Z})$ 0-dimensionnel sur $\Bbbk(\mathbf{z})$.

Soit $\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}$ réalisant le maximum de la distance d'un point de $\mathbf{Z}$ à $\underline{\mathbf{f}}$, autrement dit : $\mathrm{Ord}(\underline{\mathbf{f}}, \underline{\alpha}) = \max_{\beta \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ord}(\underline{\mathbf{f}}, \underline{\beta})$.

On pose
$$\theta = \begin{cases} \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0} \mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}}), \text{ si } \mathrm{Ord}(\underline{\mathbf{f}}, \underline{\alpha}) > \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0} \mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}}) \\ \mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}} \mathcal{I}(\mathbf{Z}), \text{ si } \mathrm{Ord}(\underline{\mathbf{f}}, \underline{\alpha}) \leq \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0} \mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}}) \end{cases} \tag{1.66}$$

Par le théorème 4.11 du chapitre 3 de [32] on a
$$\theta \leq h(\mathbf{Q}) \deg(\mathcal{I}(\mathbf{Z})) + h(\mathcal{I}(\mathbf{Z})) \deg(\mathbf{Q}) \tag{1.67}$$
(dans le cas du corps de base $\Bbbk(\mathbf{z})$ toutes les valuations sont ultramétriques, donc $\nu = 0$ et le terme $\nu m^2 \deg(\mathcal{I}(\mathbf{Z})) \deg(\mathbf{Q})$ est égal à zéro dans le théorème en référence).

Montrons que le cas
$$\mathrm{Ord}(\underline{\mathbf{f}}, \underline{\alpha}) \leq \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0} \mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}}) \tag{1.68}$$
est en fait impossible.

Dans ce cas $\theta = \mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}} \mathcal{I}(\mathbf{Z})$ et ainsi (1.67) montre
$$\mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}} \mathcal{I}(\mathbf{Z}) \leq q\delta_0 \deg(\mathbf{Z}) + q\delta_1 h(\mathbf{Z}),$$

et nous pouvons affaiblir cette inégalité en

$$\mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{I}(\mathbf{Z}) \leq \frac{q}{\min(\nu_0,\mu)}\left(\nu_0\delta_0\deg(\mathbf{Z}) + \nu_1\delta_1\deg(\mathbf{Z}) + \mu\delta_1 h(\mathbf{Z})\right).$$

En utilisant la définition de δ_0 et δ_1 nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{I}(\mathbf{Z}) &\leq \frac{q}{\min(\nu_0,\mu)}\Big(\nu_0 h(\mathbf{P}_0)\deg(\mathbf{Z}) \\ &\qquad\qquad + \nu_1\deg\mathbf{P}_0\deg(\mathbf{Z}) + \mu\deg\mathbf{P}_0 h(\mathbf{Z})\Big) \\ &\leq \frac{q}{\min(\nu_0,\mu)}\Big(\nu_0 h(\mathbf{P})\deg(\mathbf{Z}) \\ &\qquad\qquad + \nu_1\deg\mathbf{P}\deg(\mathbf{Z}) + \mu\deg\mathbf{P} h(\mathbf{Z})\Big).\end{aligned} \tag{1.69}$$

En effet, comme $\mathbf{P}$ s'annule sur $\mathbf{Z}$ on a

$$\begin{aligned}&\nu_0 h(\mathbf{P}_0)\deg(\mathbf{Z}) + \nu_1\deg\mathbf{P}_0\deg(\mathbf{Z}) + \mu\deg\mathbf{P}_0 h(\mathbf{Z}) \\ &\qquad\qquad \leq \nu_0 h(\mathbf{P})\deg(\mathbf{Z}) + \nu_1\deg\mathbf{P}\deg(\mathbf{Z}) + \mu\deg\mathbf{P} h(\mathbf{Z})\end{aligned}$$

par la minimalité définissant $\mathbf{P}_0$. Puis, en appliquant (1.47) (rappelons notre notation $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_C(\mathbf{P})$), on a

$$\mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{I}(\mathbf{Z}) > C^{\frac{1}{n}} c_n^{-\frac{n-1}{n}}\left(\nu_0 h(\mathbf{P})\deg(\mathbf{Z}) + \nu_1\deg\mathbf{P}\deg(\mathbf{Z}) + \mu\deg\mathbf{P} h(\mathbf{Z})\right)$$

et en collant ceci avec (1.69) on obtient

$$\begin{aligned}&C^{\frac{1}{n}} c_n^{-\frac{n-1}{n}}\left(\nu_0 h(\mathbf{P})\deg(\mathbf{Z}) + \nu_1\deg\mathbf{P}\deg(\mathbf{Z}) + \mu\deg\mathbf{P} h(\mathbf{Z})\right) \\ &\qquad < \frac{q}{\min(\nu_0,\mu)}\left(\nu_0 h(\mathbf{P})\deg(\mathbf{Z}) + \nu_1\deg\mathbf{P}\deg(\mathbf{Z}) + \mu\deg\mathbf{P} h(\mathbf{Z})\right).\end{aligned}$$

En simplifiant $\nu_0 h(\mathbf{P})\deg(\mathbf{Z}) + \nu_1\deg\mathbf{P}\deg(\mathbf{Z}) + \mu\deg\mathbf{P} h(\mathbf{Z})$ nous en déduisons l'inégalité

$$3\cdot n!\tilde{C} = C^{\frac{1}{n}}\min(\nu_0,\mu)c_n^{-\frac{n-1}{n}} < q = \lceil 2\cdot n!\tilde{C}\rceil$$

qui contredit la définition de q et de $\tilde{C} \geq 1$ et donc effectivement l'inégalité (1.68) est impossible.

Nécessairement on a

$$\mathrm{Ord}(\underline{\mathbf{f}},\underline{\alpha}) > \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}}).$$

Comme par construction de $\mathbf{Q}$ on a $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}}) > \tilde{C}(\delta_0+1)(\delta_1+1)^n$, on déduit directement

$$\mathrm{Ord}(\underline{\mathbf{f}},\underline{\alpha}) > \tilde{C}(\delta_0+1)(\delta_1+1)^n. \tag{1.70}$$

■

1.5 Généralités sur les transformations rationnelles des espaces projectifs

Dans ce paragraphe nous considérons la transformation rationnelle $\mathcal{T}$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ définie par

$$(X_0' : X_1', X_0 : ... : X_n) \to \Big(A_0'(X_0', X_1', X_0, ..., X_n) : A_1'(X_0', X_1', X_0, ..., X_n), \\ A_0(X_0', X_1', X_0, ..., X_n) : ... : A_n(X_0', X_1', X_0, ..., X_n)\Big), \quad (1.71)$$

où $A_i' \in \mathcal{A}$, $i = 0, 1$ et $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 0, ..., n$ sont des polynômes bi-homogènes du même bi-degré.

Définition 1.30. Notons $\operatorname{irr} \mathcal{T}$ l'union des lieux des zéros communs des systèmes de polynômes bi-homogènes $A_i'(X_0', X_1', X_0, ..., X_n)$, $i = 0, 1$, et $A_j(X_0', X_1', X_0, ..., X_n)$, $j = 0, ..., n$. On a $\operatorname{irr} \mathcal{T} \subset \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ et c'est l'ensemble des points où l'application bi-projective $\mathcal{T}$ n'est pas définie (si $\operatorname{irr} \mathcal{T} = \emptyset$ la transformation $\mathcal{T}$ est une transformation bi-projective régulière).

Pour alléger la notation nous écrivons $\mathcal{T}(W)$ au lieu de $\mathcal{T}(W \setminus \operatorname{irr} \mathcal{T})$.

Nous nous donnons un point $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1 : \mathbf{f}_1', 1 : \mathbf{f}_1 : ... : \mathbf{f}_n) \in \mathbb{P}^1_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}} \times \mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}}$ tel que $\mathbf{f}_1'$,$\mathbf{f}_1$,...,$\mathbf{f}_n$ soient algébriquement indépendantes sur $\Bbbk$.

Lemme 1.31. *Soit $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ une transformation rationnelle dominante. Il existe une constante $C_{rég}$ qui ne dépend que de $\mathcal{T}$ et de $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}$ telle que si une variété irréductible $V \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ satisfait*

$$\operatorname{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} V > C_{rég}, \quad (1.72)$$

alors

$$\dim \mathcal{T}(V) = \dim V.$$

Démonstration. Nous allons exploiter le fait que le point $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}$ n'appartient à aucune sous-variété de $\mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ définie sur $\Bbbk$ différente de tout l'espace $\mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ lui-même.

Remarquons d'abord que le morphisme $\mathcal{T}$ est un morphisme régulier sur un ouvert de $\mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ défini sur $\Bbbk$, c'est-à-dire il est un morphisme régulier hors d'un fermé F_r (différent de $\mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$) défini sur $\Bbbk$.

Ensuite, hors d'un fermé F_e différent de tout l'espace, $\mathcal{T}$ est un morphisme étale (proposition 4.5, exposé I de [19]), donc préserve la dimension des variétés.

Soit $F = F_r \cup F_e$. La variété F étant définie sur $\Bbbk$ et différente de tout l'espace (car F_r et F_e le sont), on a $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} \notin F$, et donc $\operatorname{dist}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}, F) = d_1 > 0$, ou, alternativement, $\operatorname{ord}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}, F) = o_1 < +\infty$.

Soit V une variété irréductible satisfaisant (1.72) pour $C_{\text{rég}} = o_1$. Par définition ceci signifie qu'au moins un point $\underline{\alpha} \in V$ satisfait $\operatorname{ord}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}, \underline{\alpha}) > o_1$ et donc V n'est pas contenue dans F. Ainsi, vu que V est irréductible, $U = V \backslash F$ est dense dans V et donc en particulier $\dim V = \dim U$. Comme $\mathcal{T}$ est étale sur U, on a $\dim \mathcal{T}U = \dim U$ et donc $\dim \mathcal{T}V \geq \dim \mathcal{T}U = \dim U = \dim V$. Compte tenu de l'inégalité $\dim \mathcal{T}V \leq \dim V$ (laquelle est vraie en tout cas), on conclut $\dim \mathcal{T}V = \dim V$.

Ainsi on trouve la conclusion du lemme avec $C_{\text{rég}} = o_1$.■

Utilisant aussi bien (1.47) que le lemme 1.29, on peut garantir que le cycle $\mathbf{Z}_b(P)$ contient au moins un point α à distance $b^{\frac{1}{n}} c_n^{-\frac{n-1}{n}}$ de $\underline{\mathbf{f}}$, c'est-à dire qu'il n'est pas trop loin de $\underline{\mathbf{f}}$. Le lemme suivant utilise cette remarque pour établir l'alternative : soit le polynôme P satisfait le lemme de multiplicité pour une constante absolue C, soit on peut supposer certaines propriétés particulières de l'action de $\mathcal{T}$ sur toute variété irréductible contenant $\mathbf{Z}_C(P)$.

Lemme 1.32. *Il existe une constante $C_{\mathcal{T}}$ qui ne dépend que de $\mathcal{T}$ et de $\underline{\mathbf{f}}$ telle que si P satisfait (1.44) avec $C \geq C_{\mathcal{T}}$, alors $\mathcal{T}$ préserve la dimension de toute variété irréductible contenant $\mathbf{Z}_C(P)$ (et donc la transformation $\underline{\mathcal{T}}^*$: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est correcte au sens de la définition 2.8, voir chap. 2, § 2.1).*

Démonstration. Utilisons le lemme 1.31. Ce lemme nous fournit une constante $C_{\text{rég}}$ (dépendant de $\mathcal{T}$).

Soit P un polynôme satisfaisant (1.44) avec $C \geq c_n^{n-1} C_{\text{rég}}^n$. En utilisant (1.47) nous trouvons qu'au moins un point $\underline{\alpha}$ de $\mathbf{Z}_C(P)$ satisfait $\operatorname{ord}(\underline{\mathbf{f}}, \underline{\alpha}) > C_{\text{rég}}$. Ainsi toute variété irréductible W définie sur $\mathbb{k}(\mathbf{z})$ passant par $\underline{\alpha}$ satisfait $\operatorname{ord}_{\underline{\mathbf{f}}} W > C_{\text{rég}}$ et donc, par le lemme 1.31, $\mathcal{T}$ préserve la dimension de W.

En prenant $C_{\mathcal{T}} = c_n^{n-1} C_{\text{rég}}^n$ nous concluons.■

1.6 Critères pour l'indépendance algébrique

Dans ce paragraphe nous citons quelques critères pour l'indépendance algébrique qui nous servirons dans le chapitre 3. Nous utiliserons ici les notions de multidegré, de hauteur et de taille dans l'espace multiprojectif. Ces notions sont les généralisations directes des même notions dans le cas bi-projectif, nous renvoyons le lecteur au chapitre 5 du [32] pour des détails.

Théorème 1.33. (Un cas particulier du théorème 5.1 de [20]) *Soient K un corps de nombres, k un entier appartenant à $[0, n]$ et $\underline{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.*

Soient δ, τ, σ, μ et U des réels avec $\mu \geq 0$, $\sigma, \delta \geq 1$ et $\tau \geq 0$.

On suppose qu'il existe :

– une suite strictement croissante de réels $(S_i)_{0 \leq i \leq l}$ satisfaisant :

$$0 < S_0 \leq \tau + \log 2 \text{ et } S_{l-1} < U \leq S_l, \tag{1.73}$$

– pour $1 \leq i \leq l$, un polynôme homogène $Q_i \in K[X_0, \ldots, X_n]$ tel que

1. $\deg Q_i = \delta$,
2. $h(\omega_\delta^*(Q_i)) \leq \tau$, *où* $\omega_\delta^*(Q_i)$ *désigne le polynôme*

$$\sum_{|\underline{\alpha}|=d} \binom{d}{\underline{\alpha}}^{-\frac{1}{2}} a_{|\underline{\alpha}|} \underline{X}^{|\underline{\alpha}|}$$

pour $Q_i = \sum_{|\underline{\alpha}|=d} a_{|\underline{\alpha}|} \underline{X}^{|\underline{\alpha}|}$,

3. $\frac{|Q_i(\underline{\theta})|}{|\underline{\theta}|^{\deg Q_i}} \leq \mathrm{e}^{-S_i}$,
4. *le polynôme* Q_i *n'a pas de zéros dans la boule* $B\left(\underline{\theta}, \mathrm{e}^{-(S_{i-1}+\mu)\sigma}\right)$ *de* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *de centre* $\underline{\theta}$ *et de rayon* $\mathrm{e}^{-(S_{i-1}+\mu)\sigma}$ *pour la distance* Dist.

Soit $\mathcal{I} \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ *un idéal homogène de dimension* k.

Posons $t_{\tau,\underline{d}} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\underline{d}}(\mathcal{I}) + (\tau + (k+1)\delta\log(n+1)) \deg_{\underline{d}}(\mathcal{I})$ *où* $\underline{d} = (\delta, \ldots, \delta) \in \mathbb{N}^{k+1}$.

Si la condition suivante est réalisée

$$\sigma^{k+1}\left(\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_\infty} t_{\tau,\underline{d}}(\mathcal{I}) + \left(\mu + \log 2 + \frac{\log\delta}{2\delta^k}\right)\deg_{\underline{d}}\mathcal{I}\right) \leq U, \quad (1.74)$$

où n_∞ *désigne l'indice de la ramification de la valuation* $|\cdot|_\infty$, *alors on a*

$$\log \mathrm{Dist}\,(\underline{\theta}, \mathcal{V}(\mathcal{I})) \geq -U.$$

Démonstration. C'est le théorème 5.1 de [20] avec $\kappa = \tau$, la condition B et pour la valeur absolue archimédienne.■

Nous déduisons du théorème 1.33 le corollaire suivant :

Corollaire 1.34. (voir le corollaire 5.9 de [20]) *Soient* K *un corps de nombres,* k *un entier appartenant à* $[0, n]$ *et* $\underline{\theta} = (1, \theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Soient δ, τ, σ *et* U *des réels tels que* $\sigma, \delta \geq 1$ *et* $U > \tau \geq 3(k+1)\delta\log(n+1)$.

On suppose que pour tout réel s *vérifiant* $\tau < s \leq U$, *il existe un polynôme* R_s *de* $K[X_1, \ldots, X_n]$ *tel que*

- $\deg R_s \leq \delta$,
- $h\left(\omega^*_{\deg R_s}(R_s)\right) \leq \tau$,
- $\mathrm{e}^{-\sigma s + 2\tau} \leq \frac{|R_s(\underline{\theta})|}{(1+|\underline{\theta}|^2)^{\frac{\deg R_s}{2}}} \leq \mathrm{e}^{-s}$

Alors pour tout idéal $\mathcal{I} \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ *homogène de dimension* k, *de degré* D *et de hauteur* H *satisfaisant*

$$2\delta^k [K:\mathbb{Q}]\,(\delta H + \tau D) \leq \frac{U}{\sigma^{k+1}}$$

on a

$$\log \operatorname{Dist}(\underline{\theta}, \mathcal{V}(\mathcal{I})) \geq -U.$$

Démonstration. Notre preuve répète le preuve du corollaire 5.9 de [20].

Posons $\theta_0 = 1$, notons t un tel indice que l'on a $\theta_t = \max(\theta_0, \dots, \theta_n)$ et $\underline{\theta}' = \left(\frac{\theta_0}{\theta_t}, \dots, \frac{\theta_n}{\theta_t}\right)$

Nous allons utiliser un résultat préliminaire, qui est le suivant :

Considérons un polynôme homogène $Q \in K[X_0, \dots, X_n]$ tel que $Q(\underline{X}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d} a_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}}$. Si ce polynôme a au moins un zéro dans la boule de centre $\underline{\theta}' = \left(\frac{\theta_0}{\theta_t}, \dots, \frac{\theta_n}{\theta_t}\right)$ et de rayon $R < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour la distance euclidienne de la carte affine $X_t \neq 0$ alors

$$\frac{|Q(\underline{\theta}')|}{|\underline{\theta}'|^{2\delta}} \leq R 2^{\delta-1} \sqrt{n+1}\,\delta \sqrt{\sum_{|\alpha|=\delta} \frac{|a_{\underline{\alpha}}|^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}}.$$

Ce résultat est énoncé et démontré dans [20] à la page 127.

Avec ce résultat vérifions, comme il est fait dans [20] à la page 128, que le polynôme ${}^hR_s$ n'a pas de zéro dans la boule de centre $(1, \theta_1, \dots, \theta_n)$ et de rayon $\mathrm{e}^{-\sigma s}$. Tout d'abord remarquons que la condition $\tau \geq 3(k+1)\delta \log(n+1)$ entraîne $\tau > (\delta - 1)\log 2 + \frac{1}{2}\log(n+1) + \log \delta$ et comme on a aussi $\sqrt{\sum_{|\alpha|=\delta} \frac{|a_{\underline{\alpha}}|^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}} \leq \mathrm{e}^{\tau}$, de la condition $\mathrm{e}^{-\sigma s + 2\tau} \leq \frac{|R_s(\underline{\theta})|}{(1+|\underline{\theta}|^2)^{\frac{\deg R_s}{2}}}$ on déduit

$$\mathrm{e}^{-\sigma s} 2^{\delta-1} \sqrt{n+1}\,\delta \sqrt{\sum_{|\alpha|=\delta} \frac{|a_{\underline{\alpha}}|^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}} < \frac{|{}^hR_s(\underline{\theta}')|}{|\underline{\theta}'|^{\delta}}$$

qui nous permet d'affirmer d'après la remarque préliminaire, que le polynôme ${}^hR_s$ n'a pas de zéro dans la boule de centre $(1, \theta_0, \dots, \theta_n)$ et de rayon $\mathrm{e}^{-\sigma s}$.

Soit $l = \left[\frac{U - S_0}{\mu}\right]$, où $\mu = 2(k+1)\delta \log(n+1) - \log 2 - \frac{\log \delta}{2\delta^k} > 0$. Considérons la suite

$$\begin{cases} 0 < S_0 = \tau + \log 2, \\ S_i = S_{i-1} + \mu, \qquad i = 1, \dots, l-1, \\ S_l = U. \end{cases}$$

Alors pour tout $1 \leq i \leq l$ les polynômes $Q_i = {}^hR_{S_i}$ vérifient :

- $\deg(Q_i) = \delta$,
- $h(\omega_\delta^*(Q_i)) \leq \tau$,
- $\frac{|Q_i(\underline{\theta}')|}{|\underline{\theta}'|^{\delta}} \leq \mathrm{e}^{-S_i}$,
- le polynôme Q_i n'a pas de zéro dans la boule de centre $(1, \theta_0, \dots, \theta_n)$ et de rayon $\mathrm{e}^{-\sigma(S_{i-1}+\mu)}$.

Comme de plus, pour $\underline{d} = (\delta, \ldots, \delta) \in \mathbb{N}^{k+1}$

$$\begin{aligned}\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_\infty} t_{\tau,\underline{d}}(\mathcal{I}) + \left(\mu + \log 2 + \frac{\log \delta}{2\delta^k}\right) \deg_{\underline{d}}(\mathcal{I}) \\ \leq \delta^k [K:\mathbb{Q}] \left(\delta H + (\tau + 3(k+1)\delta \log(n+1)) D\right) \\ \leq 2\delta^k [K:\mathbb{Q}] \left(\delta H + \tau D\right)\end{aligned}$$

la propriété

$$2\delta^k [K:\mathbb{Q}] \left(\delta H + \tau(k+1) D\right) \leq \frac{U}{\sigma^{k+1}}$$

entraîne la condition (1.74)

$$\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_\infty} t_{\tau,\underline{d}}(\mathcal{I}) + \left(\mu + \log 2 + \frac{\log \delta}{2\delta^k}\right) \deg_{\underline{d}}(\mathcal{I}) \leq \frac{U}{\sigma^{k+1}}.$$

Alors toutes les hypothèses du théorème 1.33 sont satisfaites et nous pouvons l'appliquer avec les paramètres δ, τ, σ, μ, U comme ci-dessus, obtenant la conclusion souhaitée

$$\log \mathrm{Dist}\left(\underline{\theta}, \mathcal{V}(\mathcal{I})\right) \geq -U.$$

ce qui achève d'établir le corollaire 1.34.■

Théorème 1.35. (Critère pour les mesures, [42], page 5) *Soient $m, k, \lambda, \delta_1, \ldots, \delta_m \in \mathbb{N}$, $\sigma, \tau, U \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m$ tels que $0 \leq k < m$, $\lambda \geq 1$, $\delta_1 \geq \cdots \geq \delta_m \geq 1$, $U > \tau \geq 4(k+1) \log\left(\delta_1 \cdots \delta_m (1+m^2)\right)$. Soit K un corps de nombres. Supposons que pour tout réel $\tau\lambda \leq s \leq U$ il existe un polynôme $R_s \in K[X_1, \ldots, X_m]$ de degré $< e(s)\delta_i$ en X_i, longueur $\leq \mathrm{e}^{e(s)\tau}$ et satisfaisant*

$$\exp\left(-s\sigma + 2e(s)\tau\right) \leq \frac{|R_s(\underline{x})|}{\prod_{i=1}^m (1+|x_i|^2)^{\delta_i/2}} \leq \exp\left(-s - e(s)(\delta_1 + \cdots + \delta_m)\right) \tag{1.75}$$

où $e(s) := 1 + \max_{1 \leq i \leq m} \left[\frac{\deg_{X_i} R_s}{\delta_i}\right] \leq \lambda$. Alors, pour toute variété algébrique $V \subset \mathbb{A}^m(\mathbb{C})$ définie sur $\mathbb{Q}$, de dimension k, satisfaisant

$$[K:\mathbb{Q}] \cdot 3\lambda^{k+1} \delta_1 \ldots \delta_k \left(\delta_{k+1} t(V) + \tau \deg(V)\right) \leq U/(\sigma m)^{k+1}, \tag{1.76}$$

on a

$$\log \mathrm{Dist}(x', V') \geq -U,$$

où $x' = (1 : x_1 : \ldots : x_m) \in \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ et V' désigne la completion de V dans $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$.

Démonstration. On considère la complétion W de V dans $\left(\mathbb{P}^1\right)^m$ et le point $\tilde{x} = (1 : x_1, \ldots, 1 : x_m) \in \left(\mathbb{P}^1\right)^m$. Soit $\phi : \left(\mathbb{P}^1\right)^m \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ où $N = (\delta_1 + 1) \cdots (\delta_m + 1) - 1$ le plongement défini par

$$\phi(x_{0,1} : x_{1,1}, \ldots, x_{0,m} : x_{1,m}) = \left(\ldots : \prod_{i=1}^m x_{0,i}^{\alpha_i} x_{1,i}^{\delta_i - \alpha_i} : \ldots\right)_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^m, 0 \leq \alpha_i \leq \delta_i}.$$

On vérifie, comme dans [40], III, proposition 1 et [20], §2.3 (b), lemme 2.13,

$$\begin{aligned} d\left(\phi(W)\right) &= k! \sum_{\substack{i\in\{0,1\}^m \\ |i|=k}} d_i(W)\delta_1^{i_1}\cdots\delta_m^{i_m}, \\ h\left(\phi(W)\right) &= (k+1)! \sum_{\substack{i\in\{0,1\}^m \\ |i|=k+1}} \left(h_i(W) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ i_\alpha\neq 0}} d_{\hat{i_\alpha}}(W) \right) \delta_1^{i_1}\cdots\delta_m^{i_m}, \end{aligned}$$

où $d_i(W)$ et $h_i(W)$ désignent les degrés et hauteurs multihomogènes de W et $\hat{i_\alpha}$ est déduit de i en posant la α-ième composante égale à 0 (i.e. $|\hat{i_\alpha}| = k$). En particulier, $k!\sum d_i(W)$ et $(k+1)!\sum h_i(W)$ sont le degré et la hauteur de V plongée dans $\mathbb{P}^{2^m-1}$ par le plongement de Segre et sont égaux à $m^k d(W)$ et $m^{k+1}h(W)$ respectivement. Chaque polynôme R_s, convenablement homogénéisé, s'écrit comme l'image inverse par ϕ d'une forme $P_s \in K[X_0,\ldots,X_N]$ de degré $e(s)\leq\delta$ et de longueur $\leq \mathrm{e}^{e(s)\tau} \leq \mathrm{e}^{\tau\delta}$. De plus si $y=\phi(\tilde{x})$ on a

$$1 \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1+|x_i|^2)^{\delta_i/2}}{|y|} \leq \mathrm{e}^{\delta_1+\cdots+\delta_m},$$

d'où

$$\exp\left(-s\sigma + 2e(s)\tau\right) \leq \frac{|P_s(y)|}{|y|^{\deg P_s}} \leq \exp\left(-s\right).$$

D'autre part, la condition (1.76) entraîne

$$2\delta^{k+1}\left(h\left(\phi(W)\right) + (k+1)\tau d\left(\phi(W)\right)\right) \leq U'/\sigma^{k+1}$$

où $U' = U - m^{k+1}\delta_1\cdots\delta_k \log\left(\delta_1(1+m^2)\right) d(V)$, car, comme $\delta_1\geq\cdots\geq\delta_m$, on a

$$\begin{aligned} d\left(\phi(W)\right) &= m^k d(V)\delta_1\cdots\delta_k, \\ h\left(\phi(W)\right) &= m^{k+1} t(V)\delta_1\cdots\delta_{k+1}. \end{aligned}$$

Ceci permet d'appliquer le corollaire 1.34 à $\phi(W)$ pour conclure la démonstration, car avec la proposition 3.9 de [20] on vérifie

$$\begin{aligned} \log \mathrm{Dist}(x',V') &\geq \log \mathrm{Dist}(\tilde{x},W) - \frac{k+1}{1}\cdot \log\Big(\delta_1\cdots\delta_m(1+m^2)\Big)\cdot d\left(\phi(W)\right) \\ &\geq \log \mathrm{Dist}(y,\phi(W)) - m^{k+1}\delta_1\cdots\delta_k \log\Big(\delta_1(1+m^2)\Big)\, d\left(\phi(W)\right) \\ &\geq \log -U' - m^{k+1}\delta_1\cdots\delta_k \log\Big(\delta_1(1+m^2)\Big)\, d\left(\phi(W)\right) = -U. \end{aligned}$$

ce qui achève d'établir le théorème 1.35.■

Le théorème 1.35 est démontré dans [42] avec $\mathbb{Z}$ au lieu et place de K. Néanmoins la preuve reste valable si on remplace $\mathbb{Z}$ par un corps de nombres quelconque, il faut juste utiliser notre corollaire 1.34 au lieu et place du corollaire 5.9 de [20] (cité dans [42] comme "le théorème page 5."). Nous avons mis ici la copie de la démonstration donnée dans [42].

Chapitre 2

Lemme de multiplicité formel

2.1 Remarques préliminaires

Dans ce chapitre notre but est de démontrer le théorème 2.16 ci-après.

Nous reprenons pour la suite la situation considérée dans le sous-paragraphe 1.2.3. Soit donc $\Bbbk$ un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique quelconque et $\mathcal{A}$ l'anneau de polynômes à coefficients dans $\Bbbk$ suivant : $\mathcal{A} = \Bbbk[X_0', X_1'][X_0, ..., X_n]$.

Nous considérons ici une application $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaisant pour tout $Q \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} &\deg_{\underline{X}} \phi(Q) \leq \mu \deg_{\underline{X}} Q, \\ &\deg_{\underline{X'}} \phi(Q) \leq \nu_0 \deg_{\underline{X'}} Q + \nu_1 \deg_{\underline{X}} Q \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour des constantes μ, ν_0 et ν_1. La coïncidence de notation avec (1.22) n'est pas accidentelle, nous allons utiliser dans ce chapitre les quantités δ_0 et δ_1 introduites dans la définition 1.15 avec les paramètres ν_0, ν_1, μ qui figurent dans (2.1).

Désormais nous notons ϕ^N la N-ème itéré de l'application ϕ (qui remplace la notation $\phi^{[N]}$ utilisée dans l'introduction).

Lemme 2.1. *Soit N un entier positif et $Q \in \mathcal{A}$. Alors*

$$\deg_{\underline{X}} \phi^N(Q) \leq \mu^N \deg_{\underline{X}} Q, \tag{2.2}$$

$$\deg_{\underline{X'}} \phi^N(Q) \leq \nu_0^N \deg_{\underline{X'}} Q + \nu_1 \left(\sum_{i=0}^{N-1} \nu_0^{N-i-1}\mu^i\right) \deg_{\underline{X}} Q. \tag{2.3}$$

Démonstration. On procède par récurrence. Pour $N = 0$ il n'y a rien à montrer (dans ce cas la somme $\sum_{i=0}^{N-1}$ vaut par convention 0). Pour $N = 1$ c'est (2.1). Supposons que nous ayons déjà vérifié le lemme pour N et cherchons de le démontrer pour $N + 1$.

Avec (2.1) appliqué au polynôme $\phi^N(Q)$ et l'hypothèse de récurrence nous avons

$$\deg_{\underline{X}} \phi^{N+1}(Q) = \deg_{\underline{X}} \phi\left(\phi^N(Q)\right) \leq \mu \deg_{\underline{X}} \phi^N(Q) \leq \mu^{N+1} \deg_{\underline{X}} Q$$

et ainsi (2.2) pour $N+1$. Le calcul est semblable pour $\deg_{\underline{X'}} \phi^{N+1}(Q)$:

$$\begin{aligned}
\deg_{\underline{X'}} \phi^{N+1}(Q) &= \deg_{\underline{X'}} \phi\left(\phi^N(Q)\right) \leq \nu_0 \deg_{\underline{X'}} \phi^N(Q) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} \phi^N(Q) \\
&\leq \nu_0 \left(\nu_0^N \deg_{\underline{X'}} Q + \nu_1 \left(\sum_{i=0}^{N-1} \nu_0^{N-i-1}\mu^i\right) \deg_{\underline{X}} Q\right) + \nu_1 \mu^N \deg_{\underline{X}} Q \\
&\leq \nu_0^{N+1} \deg_{\underline{X'}} Q + \nu_1 \sum_{i=0}^{N} \left(\nu_0^{N-i}\mu^i\right) \deg_{\underline{X}} Q
\end{aligned}$$

et ainsi (2.3) est aussi vérifiée pour $N+1$.■

Nous fixons un point $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1 : \mathbf{z}, 1 : f_1(\mathbf{z}) : \ldots : f_n(\mathbf{z})) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{k}[[\mathbf{z}]]} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{k}[[\mathbf{z}]]}$ et supposons qu'il existe deux constantes réelles $\lambda > 0$ et $K_\lambda \geq 0$ telles que

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\phi(Q)(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \geq \lambda \, \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(Q(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})). \tag{2.4}$$

pour tout polynôme $Q \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(Q(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) \geq K_\lambda$.

Remarque 2.2. En pratique la condition (2.4) résulte de l'existence d'une transformation analytique sous-jacente à ϕ. Supposons qu'il existe une application $\mathbf{T} : \mathbb{k}[[\mathbf{z}]] \to \mathbb{k}[[\mathbf{z}]]$ satisfaisant pour toute $\mathbf{h} \in \mathbb{k}[[\mathbf{z}]]$

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{T}(\mathbf{h})) \geq \lambda \, \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{h}), \tag{2.5}$$

et satisfaisant aussi pour tout polynôme homogène $Q \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\phi(Q)(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \geq \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{T}(Q(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})). \tag{2.6}$$

Ayant les inégalités (2.5) et (2.6) pour une telle application $\mathbf{T}$ quelconque on en déduit immédiatement (2.4).

Exemple 2.1.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, définissons l'application $\mathbb{k}$-linéaire $\mathbf{T} : \mathbb{k}[[\mathbf{z}]] \to \mathbb{k}[[\mathbf{z}]]$ par $\mathbf{z}^k \to \mathbf{z}^{dk}$, $k \in \mathbb{N}$. L'application $\mathbf{T}$ satisfait la propriété (2.6) avec $\lambda = d$ et $K_\lambda = 0$.
2. Définissons l'application $\mathbb{k}$-linéaire $\mathbf{T} : \mathbb{k}[[\mathbf{z}]] \to \mathbb{k}[[\mathbf{z}]]$ par $\mathbf{z}^k \to k\mathbf{z}^{k-1}$ (c'est-à-dire $\mathbf{T}(h) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} h$ pour tout $h \in \mathbb{k}[[\mathbf{z}]]$). L'application $\mathbf{T}$ satisfait la propriété (2.6) avec $\lambda = \frac{1}{2}$ et $K_\lambda = 2$, ou également avec $\lambda = 1 - \varepsilon$ et $K_\lambda = \lceil 1/\varepsilon \rceil$, $k \in \mathbb{N}$, où $\lceil x \rceil$ désigne le nombre entier le plus petit supérieure à x.

On peut considérer ϕ comme agissant sur $\mathbb{k}[\mathbf{z}][X_0 : ... : X_n]$ par

$$\phi(\mathbf{Q}) = \phi\left({X'_0}^{\deg_{\mathbf{z}}\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(X'_1/X'_0)(X_0 : ... : X_n)\right)\Big|_{(X'_0:X'_1)=(1,\mathbf{z})}. \tag{2.7}$$

Cette application ϕ satisfait

$$\begin{aligned} \deg_{\underline{X}}\phi(\mathbf{Q}) &\leq \mu\deg_{\underline{X}}\mathbf{Q}, \\ h(\phi(\mathbf{Q})) = \deg_{\mathbf{z}}\phi(\mathbf{Q}) &\leq \nu_0\deg_{\mathbf{z}}\mathbf{Q} + \nu_1\deg_{\underline{X}}\mathbf{Q} \\ &\leq \nu_0 h(\mathbf{Q}) + \nu_1\deg\mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Définition 2.3. Soit V un $\mathbb{k}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ un idéal premier. Nous posons

$$I_0(V,\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} (V\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{A},$$

où $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ désigne le localisé de $\mathcal{A}$ par rapport à l'idéal $\mathcal{P}$ et $V\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ désigne l'idéal engendré dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ par les éléments de V.

Plus généralement, la transformation $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ étant donnée, nous posons

$$I_e(V,\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \Big((V + \phi(V) + ... + \phi^e(V))\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\Big) \cap \mathcal{A}, \quad e = 0, 1, 2, 3, ...$$

Remarque 2.4.

1. L'idéal $I_0(V,\mathcal{P})$ est simplement l'intersection des composantes primaires contenues dans $\mathcal{P}$, de l'idéal engendré par V.
2. Vu les définitions, on a $I_e(V,\mathcal{P}) = I_0(V + \phi(V) + ... + \phi^e(V),\mathcal{P})$.

Définition 2.5. Soit I un idéal et soit

$$I = \mathcal{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_r \cap \mathcal{Q}_{r+1} \cap ... \cap \mathcal{Q}_s \tag{2.9}$$

une décomposition primaire de I, où $\mathcal{Q}_1$,...,$\mathcal{Q}_r$ sont les idéaux primaires associés aux premiers de rang minimal (c'est-à-dire égal à $\mathrm{rg}(I)$) et $\mathcal{Q}_{r+1}$,...,$\mathcal{Q}_s$ correspondent aux composantes de rang strictement plus grand que $\mathrm{rg}(I)$.

Nous notons

$$\mathrm{eq}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_r \tag{2.10}$$

la partie équidimensionnelle de rang minimal de I.

Définition 2.6. Nous dirons qu'un idéal $I \subset \mathcal{A}$ est *ϕ-stable* si on a $\phi(I) \subset I$.

Remarque 2.7. Soit $\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} \subset \mathcal{A}$ l'idéal bi-homogène des polynômes s'annulant en $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}$. Pour tout $Q \in \mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}$ on a, au vu de (2.4),

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\phi(Q)(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \geq \lambda\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(Q(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) = \lambda\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{0} = +\infty, \tag{2.11}$$

donc $\phi(Q)(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) = 0$ et $\phi(Q) \in \mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}$. Ainsi $\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}$ est ϕ-stable.

Désormais et jusqu'au paragraphe 2.3 nous supposons que les séries formelles $f_1(\mathbf{z}),...,f_n(\mathbf{z})$ sont algébriquement indépendantes sur $\Bbbk(\mathbf{z})$.

Pour nos fins il nous faut introduire la classe des applications de l'anneau $\mathcal{A}$ dans lui même suivante :

Définition 2.8. Nous dirons que ϕ est *correcte par rapport à l'idéal* $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ si pour tout idéal I tel que tous ses premiers associés sont contenus dans $\mathcal{P}$ l'inclusion

$$\phi(I) \subset \mathrm{eq}(I) \tag{2.12}$$

implique

$$\phi(\mathrm{eq}(I)) \subset \mathrm{eq}(I). \tag{2.13}$$

Lemme 2.9. *Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ un idéal et $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ une transformation quelconque. Supposons que pour tout idéal équidimensionnel J tel que tous ses premiers associés soient contenus dans $\mathcal{P}$* l'une *des deux hypothèses suivantes est vérifiée pour tout $x \in \mathcal{P}$:*

$$x\phi(J) \subset \phi(xJ) + J, \tag{2.14}$$

$$\text{ou}$$

$$\phi(x)\phi(J) \subset \phi(xJ) + J \tag{2.15}$$

$$\textit{et } \mathrm{rg}\,\phi^{-1}(\mathcal{Q}) = \mathrm{rg}\mathcal{Q} \textit{ pour tout } \mathcal{Q} \in \mathrm{Ass}(\mathcal{A}/J). \tag{2.16}$$

Alors, la transformation ϕ est correcte par rapport à $\mathcal{P}$.

Démonstration. Soit $I \subset \mathcal{A}$ un idéal tel que tous ses premiers associés sont contenus dans $\mathcal{P}$ et tel que l'on a (2.12). Pour démontrer le lemme il nous faut vérifier (2.13).

Supposons d'abord que ϕ satisfait l'hypothèse (2.14). Dans ce cas choisissons

$$x \in I :_{\mathcal{A}} \mathrm{eq}(I) \tag{2.17}$$

tel que

$$x \text{ non-diviseur de zéro dans } \mathcal{A}/\mathrm{eq}(I) \tag{2.18}$$

(le choix d'un tel x est possible car les premiers associés à $I :_{\mathcal{A}} \mathrm{eq}(I)$ sont de rang strictement plus grand que celui des premiers associés à $\mathrm{eq}(I)$).

Vu l'hypothèse (2.14) (appliquée avec $J = \mathrm{eq}(I)$)

$$x\phi(\mathrm{eq}(I)) \subset \phi(x\,\mathrm{eq}(I)) + \mathrm{eq}(I)$$

et avec (2.17), puis (2.12), nous en déduisons

$$x\phi(\mathrm{eq}(I)) \subset \phi(I) + \mathrm{eq}(I) \subset \mathrm{eq}(I) + \mathrm{eq}(I) \subset \mathrm{eq}(I). \tag{2.19}$$

Comme nous avons choisi x satisfaisant (2.18), nous déduisons de (2.19)

$$\phi(\mathrm{eq}(I)) \subset \mathrm{eq}(I),$$

établissant (2.13) dans ce cas (i.e. sous l'hypothèse (2.14)).

Supposons maintenant que l'on a l'hypothèse (2.15). Dans ce cas choisissons un $x \in I :_{\mathcal{A}} \mathrm{eq}(I)$ tel que

$$\phi(x) \text{ soit non-diviseur de zéro dans } \mathcal{A}/\mathrm{eq}(I) \tag{2.20}$$

(ce dernier est équivalent à dire que $x \notin \phi^{-1}(\mathcal{Q})$ pour tout $\mathcal{Q} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{eq}(I))$). Le choix d'un tel x est possible car les premiers associés à $I :_{\mathcal{A}} \mathrm{eq}(I)$ sont de rang strictement plus grand que celui des premiers associés à $\mathrm{eq}(I)$ et l'hypothèse (2.16) nous assure $\mathrm{rg}\left(\phi^{-1}(\mathcal{Q})\right) = \mathrm{rg}\mathcal{Q}$ pour tout idéal $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$.

Or, on a $x\,\mathrm{eq}(I) \subset I$ et donc nous déduisons de l'hypothèse (2.15) (appliquée avec $J = \mathrm{eq}(I)$)

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(\mathrm{eq}(I)) &\subset \phi(x\,\mathrm{eq}(I)) + \mathrm{eq}(I)\\ &\subset \phi(I) + \mathrm{eq}(I) \subset \mathrm{eq}(I) + \mathrm{eq}(I) \subset \mathrm{eq}(I),\end{aligned} \tag{2.21}$$

d'où $\phi(\mathrm{eq}(I)) \subset \mathrm{eq}(I)$ car, vu (2.20), $\phi(x)$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{A}/\mathrm{eq}(I)$.

Ainsi, nous avons établi (2.13) à l'aide de l'hypothèse (2.15) et ceci achève la démonstration du lemme.■

Corollaire 2.10. *Soit $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ une dérivation. Alors pour tout idéal $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$, l'application $\phi = D$ est correcte par rapport à $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Soit $J \subset \mathcal{A}$ un idéal et $x \in \mathcal{A}$. Vu l'égalité de Newton-Leibnitz, pour tout $a \in J$ on a

$$\phi(x \cdot a) = x \cdot \phi(a) + \phi(x) \cdot a.$$

Comme J est un idéal, $-\phi(x) \cdot a \in J$, et ainsi

$$x \cdot \phi(a) = \phi(x \cdot a) - \phi(x) \cdot a \in \phi(xJ) + J.$$

Donc on a vérifié la condition (2.14) du lemme 2.9 et par ce lemme nous obtenons que $\phi = D$ est correcte par rapport à tout idéal $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$.■

Corollaire 2.11. *Soit $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ une application birationnelle, telle que pour un point $\underline{\alpha} \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ et toute variété irréductible V passant par $\underline{\alpha}$ on ait*

$$\dim \mathcal{T}(V) = \dim V. \tag{2.22}$$

Notons $\mathcal{P}$ l'idéal de $\mathcal{A}$ définissant le point $\underline{\alpha}$. Alors, la transformation $\phi = \mathcal{T}^*$ est correcte par rapport à $\mathcal{P}$.

Démonstration. Comme $\underline{\mathcal{T}}^*$ est un morphisme de l'anneau $\mathcal{A}$ (dans lui même), on a immédiatement (pour tout idéal $J \subset \mathcal{A}$)

$$\phi(x)\phi(J) = \phi(xJ),$$

donc l'hypothèse (2.15) du lemme 2.9 est satisfaite. Pour des idéaux premiers on a $\mathcal{V}(\underline{\mathcal{T}}^{*-1}(\mathcal{Q})) = \mathcal{T}(\mathcal{V}(\mathcal{Q}))$ et ainsi l'hypothèse (2.22) implique l'hypothèse (2.16) du lemme 2.9. Donc par ce lemme nous obtenons que la transformation $\phi = \underline{\mathcal{T}}^*$ est correcte par rapport à l'idéal $\mathcal{P}$ de l'énoncé.$\blacksquare$

Nous introduisons ici des notations ρ_i et V_i que nous utiliserons abondamment dans la suite.

Définition 2.12. Posons d'abord

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \nu_1 = 0, \\ 2^{n+2} \max\left(1, \frac{4\nu_0}{\nu_1}\right)^{n+1} & \text{si } \nu_1 \neq 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

La suite des nombres ρ_i est définie récursivement. On pose $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = 1$ et $\rho_{i+1} = \nu(n+1)!\rho_i^{n+2} \max(\mu, \nu_0)^{\nu(n+1)!\rho_i^{n+1}}$ pour $i = 1, ..., n+1$. Les constantes μ, ν_0 et ν_1 dans cette définition sont les mêmes que dans (2.1).

Soit Z un cycle algébrique (défini sur $\mathbb{k}$) dans l'espace $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$. On désigne par V_i, ou plus précisément par $V_i(Z)$, l'espace vectoriel (sur $\mathbb{k}$) engendré par les polynômes (dans $\mathbb{k}[X_0' : X_1', X_0 : ... : X_n]$) s'annulant sur le cycle Z et de degré en $\underline{X}'$ au plus $\rho_i\left(\delta_0(Z) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(Z)\right)$ et de degré en $\underline{X}$ au plus $\rho_i\delta_1(Z)$ (rappelons que $\delta_0(Z)$ et $\delta_1(Z)$ sont introduits dans la définition 1.15).

Si I est un idéal propre bi-homogène de $\mathcal{A}$ nous notons aussi

$$V_i(I) = V_i(\mathcal{V}(I)),$$

où $\mathcal{V}(I)$ est le cycle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ défini par I.

Définition 2.13. Associons à toute variété W un nombre $i_0(W)$: c'est le plus grand nombre entier positif tel que $\operatorname{rg}(I_0(V_i(W), \mathcal{I}(W))) \geq i$ pour tout $1 \leq i \leq i_0(W)$.

Remarque 2.14. Vu les définitions 1.15 et 2.12 on vérifie l'inégalité $\operatorname{rg}(I_0(V_1(W), \mathcal{I}(W))) \geq 1$ et l'indice $i_0(W) \geq 1$ est bien défini pour toute variété W. D'un autre côté, le rang de tout idéal homogène dans $\mathcal{A}$ ne peut pas excéder $n+1$, donc $i_0(W) \leq n+1$ pour toute variété W.

Définition 2.15. 1. Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de l'anneau $\mathcal{A}$, V un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de $\mathcal{A}$ et ϕ une transformation de l'anneau $\mathcal{A}$ dans lui-même. Alors,

$$e_\phi(V, \mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \max(e \big| \operatorname{rg}((V + \phi(V) + ... + \phi^e(V))\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) = \operatorname{rg}(V\mathcal{A}_{\mathcal{P}})). \tag{2.24}$$

2. Soit I un idéal propre de l'anneau $\mathcal{A}$,

$$m(I) = m(\operatorname{eq}(I)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{A}) | \operatorname{rg}(\mathcal{P}) = \operatorname{rg}(I)} l_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}((\mathcal{A}/I)_{\mathcal{P}}) \in \mathbb{N}^*, \tag{2.25}$$

où $l_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}((\mathcal{A}/I)_{\mathcal{P}})$ désigne la longueur de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$-module $(\mathcal{A}/I)_{\mathcal{P}}$.

La quantité $m(I)$ est simplement le nombre des composantes primaires de I comptées avec leur longueur comme multiplicité.

2.2 Lemme de multiplicité formel

Soient ϕ et $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}$ comme au début de ce chapitre (satisfaisant les inégalités (2.1) et (2.4)). Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.16. (Lemme de multiplicité formel.) *Supposons qu'il existe une constante $C_0 \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout idéal premier bi-homogène $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ de rang n on ait*

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{Q} \geq C_0 \Rightarrow \text{ la transformation } \phi \text{ est correcte par rapport à } \mathcal{Q}. \tag{2.26}$$

Soient $n_1 \in \{1, \ldots, n\}$ et $C_1 \in \mathbb{R}^+$. Supposons de plus qu'il existe une constante $K_0 \in \mathbb{R}^+$ (dépendant uniquement de ϕ et de $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}$) avec la propriété suivante : pour tout idéal équidimensionnel bi-homogène ϕ-stable $I \subset \mathcal{A}$ de rang $\geq n_1$ et tel que $m(I) \leq (n+1)!\rho_{n+1}^{n+1}$, dont les idéaux premiers associés satisfont

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{Q} \geq C_0, \tag{2.27}$$

il existe un facteur premier $\mathcal{Q} \in \mathrm{Ass}(\mathcal{A}/I)$ satisfaisant

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}(\mathcal{Q}) < K_0 \left(\mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q}+1)}(\mathcal{Q}) + \mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q})}(\mathcal{Q})\right). \tag{2.28}$$

Alors, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $P \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ satisfaisant pour tout $C \geq C_1$

$$i_0(\mathcal{Z}_C(P)) \geq n_1 \tag{2.29}$$

(rappelons que le cycle $\mathcal{Z}_C(P)$ est introduit dans la remarque 1.27) satisfait aussi

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) \leq K \left((\mu+\nu_0)(\deg_{\underline{X}'} P + 1) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} P\right) \times \mu^{n-1}(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n. \tag{2.30}$$

Remarque 2.17. La condition (2.29) est toujours satisfaite (vu la définition de $i_0(Z(P))$) avec $n_1 = 1$ et $C_1 = 0$.

2.2.1 Estimation de $m(I_0(V_i, \mathcal{P}))$. Le cas $\nu_1 = 0$.

Dans ce sous-paragraphe nous considérons le cas $\nu_1 = 0$.

Lemme 2.18. *Soit I un idéal bi-homogène propre de $\mathcal{A}$, $I \neq \mathcal{A}$ et $\delta_0 = \delta_0(I)$, $\delta_1 = \delta_1(I)$ comme dans la définition 1.15.*

Soit $W \subsetneq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ une variété irréductible qui se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$ telle que

$$\delta_1 \mathrm{d}_{(0,\dim W)}W + \delta_0 \dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)}W < \frac{\delta_0\delta_1^{\mathrm{codim}(W)}}{n!}, \tag{2.31}$$

alors, il existe un polynôme $Q \in \mathcal{I}(W) \setminus I$ satisfaisant les deux inégalités :

$$\begin{aligned} \deg_{\underline{X}'} Q &\leq \delta_0 - 1, \\ \deg_{\underline{X}} Q &\leq \delta_1 - 1. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Démonstration. Remarquons que si $\delta_0 = 0$ ou $\delta_1 = 0$, alors une variété W satisfaisant (2.31) n'existe pas : le membre de droite est nul et ne peut majorer strictement celui de gauche. On peut donc supposer $\delta_0 \geq 1$ et $\delta_1 \geq 1$. Comme W se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$, on a

$$\mathrm{d}_{(1,\dim W-1)} W \geq 1, \tag{2.33}$$

et donc le membre de gauche de (2.31) est au moins $\dim W \geq 1$. Ainsi on peut supposer

$$\delta_0 \delta_1^{\operatorname{codim}(W)} \geq n!$$

Si un polynôme Q_0 de bi-degré $(\delta_0 - 1, \delta_1 - 1)$ s'annule sur W, il satisfait toutes les conditions de la conclusion du lemme 2.18 qui dans ce cas se trouve établi. En effet, Q_0 ne peut pas appartenir à I car on a évidemment

$$\begin{aligned} \mu(\delta_1 - 1)\mathrm{d}_{(0,\dim I)} I + \nu_0(\delta_0 - 1)\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)} I + \nu_1(\delta_1 - 1)\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)} I \\ < \mu\delta_1 \mathrm{d}_{(0,\dim I)} I + \nu_0\delta_0 \mathrm{d}_{(1,\dim I-1)} I + \nu_1\delta_1 \mathrm{d}_{(1,\dim I-1)} I \end{aligned} \tag{2.34}$$

et le membre de droite de (2.34) minimise l'expression

$$\mu \deg_{\underline{X}}(Q)\mathrm{d}_{(0,\dim I)} I + \nu_0 \deg_{\underline{X}'}(Q)\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)} I + \nu_1 \deg_{\underline{X}}(Q)\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)} I$$

pour les polynômes Q bi-homogènes appartenant à $I \setminus \{0\}$ (cf. la définition 1.15).

Il nous reste à éliminer le cas où aucun polynôme de bi-degré $(\delta_0 - 1, \delta_1 - 1)$ s'annule sur W. Sous cette hypothèse, on a la minoration

$$H_g(W, \delta_0 - 1, \delta_1 - 1) \geq \delta_0 \binom{\delta_1 + n - 1}{n} \geq \delta_0 \frac{\delta_1^n}{n!}. \tag{2.35}$$

Dans le même temps, par l'estimation du corollaire 9 de [43] on a

$$\begin{aligned} H_g(W, \delta_0 - 1, \delta_1 - 1) &\leq (\delta_1 - 1)^{\dim W} \mathrm{d}_{(0,\dim W)} W \\ &+ (\delta_0 - 1)(\delta_1 - 1)^{\dim W - 1} \dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)} W + \dim W. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Comme on a (2.49), nous pouvons affaiblir (2.55) en

$$\begin{aligned} H_g(W, \delta_0 - 1, \delta_1 - 1) \leq & \delta_1^{\dim W} \mathrm{d}_{(0,\dim W)} W \\ & + \delta_0 \delta_1^{\dim W - 1} \dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)} W. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Les inégalités (2.35) et (2.37) ensemble contredisent l'hypothèse (2.31). ∎

Corollaire 2.19. *Dans la situation du lemme 2.18 si I est radical et si une variété irréductible W se projettant surjectivement sur $\mathbb{P}^1$ contient $\mathcal{V}(I)$, alors*

$$\delta_1 \mathrm{d}_{(0,\dim W)} W + \delta_0 \dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)} W \geq \frac{\delta_0 \delta_1^{\mathrm{codim}(W)}}{n!}, \tag{2.38}$$

Démonstration. C'est un corollaire immédiat du lemme 2.18.■

Corollaire 2.20. *Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ un idéal premier tel que $\mathcal{V}(\mathcal{P}) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$. Avec la notation $V_i = V_i(\mathcal{P})$ et ρ_i introduite dans la définition 2.12, on a (rappelons $I_0(V_i, \mathcal{P}) = (V_i \mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{A}$, cf. définition 2.3)*

$$m(I_0(V_i, \mathcal{P})) \leq (n+1)! \rho_i^{n+1}. \tag{2.39}$$

Démonstration. Notons $r = \mathrm{rg} I_0(V_i, \mathcal{P})$. L'idéal $I_0(V_i, \mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$, étant étendu-contracté par localisation en $\mathcal{P}$ d'un idéal engendré par des polynômes de bi-degré $(\rho_i \delta_0(\mathcal{P}), \rho_i \delta_1(\mathcal{P}))$, satisfait d'après le théorème de Bézout

$$\begin{aligned}(n-r+1)(\rho_i \delta_0(\mathcal{P}))(\rho_i \delta_1(\mathcal{P}))^{n-r} \mathrm{d}_{(1,n-r)}\left(I_0(V_i, \mathcal{P})\right) \\ + (\rho_i \delta_1(\mathcal{P}))^{n-r+1} \mathrm{d}_{(0,n-r+1)}\left(I_0(V_i, \mathcal{P})\right) \\ \leq (n+1) \rho_i^{n+1} \delta_0(\mathcal{P})(\delta_1(\mathcal{P}))^n,\end{aligned} \tag{2.40}$$

puis en simplifiant des deux côtés le facteur $\rho_i^{n-r+1} \delta_1(\mathcal{P})^{n-r}$

$$\begin{aligned}(n-r+1)\delta_0(\mathcal{P}) \mathrm{d}_{(1,n-r)}\left(I_0(V_i, \mathcal{P})\right) + \delta_1(\mathcal{P}) \mathrm{d}_{(0,n-r+1)}\left(I_0(V_i, \mathcal{P})\right) \\ \leq (n+1)\delta_0(\mathcal{P})(\rho_i \delta_1(\mathcal{P}))^r.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Soit $W = \mathcal{V}(\mathcal{Q})$, où $\mathcal{Q}$ est un premier (non nécessairement minimal) associé à $\mathcal{V}(I_0(V_i, \mathcal{P}))$. Par construction de $I_0(V_i, \mathcal{P})$ tous ses premiers associés sont contenus dans $\mathcal{P}$, ainsi $\mathcal{V}(\mathcal{P}) \subset W$ et comme $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$, la variété W aussi. En appliquant le corollaire 2.19 nous obtenons que W satisfait (2.38), ou autrement-dit tout premier $\mathcal{Q}$ associé à $I_0(V_i, \mathcal{P})$ satisfait

$$\begin{aligned}\delta_1(\mathcal{P}) \mathrm{d}_{(0,n+1-\mathrm{rg}\mathcal{Q})} \mathcal{Q} + (n+1-\mathrm{rg}\mathcal{Q}) \delta_0(\mathcal{P}) \mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q})} \mathcal{Q} \\ \geq \frac{\delta_0(\mathcal{P}) \delta_1(\mathcal{P})^{\mathrm{rg}\mathcal{Q}}}{n!}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Mais

$$\mathrm{d}_{(1,n-r)}(I_0(V_i, \mathcal{P})) = \sum_{\substack{\mathcal{Q} \in \mathrm{Spec}\mathcal{A}, \\ \mathrm{rg}(\mathcal{Q}) = r}} \mathrm{d}_{(1,n-r)}(\mathcal{Q}) l_{\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}}((\mathcal{A}/I_0(V_i, \mathcal{P}))_{\mathcal{Q}}), \tag{2.43}$$

et

$$\mathrm{d}_{(0,n-r+1)}(I_0(V_i,\mathcal{P})) = \sum_{\substack{\mathcal{Q}\in\mathrm{Spec}\mathcal{A},\\ \mathrm{rg}(\mathcal{Q})=r}} \mathrm{d}_{(0,n-r+1)}(\mathcal{Q}) l_{\mathcal{A}_\mathcal{Q}}((\mathcal{A}/I_0(V_i,\mathcal{P}))_\mathcal{Q}), \tag{2.44}$$

En sommant l'égalité (2.43) avec le coefficient $(n-r+1)\delta_0(\mathcal{P})$ et l'égalité (2.44) avec le coefficient $\delta_1(\mathcal{P})$, on obtient

$$\begin{aligned}&(n-r+1)\delta_0(\mathcal{P})\mathrm{d}_{(1,n-r)}(I_0(V_i,\mathcal{P})) + \delta_1(\mathcal{P})\mathrm{d}_{(0,n-r+1)}(I_0(V_i,\mathcal{P}))\\ &= \sum_{\substack{\mathcal{Q}\in\mathrm{Spec}\mathcal{A},\\ \mathrm{rg}(\mathcal{Q})=r}} \Big((n-r+1)\delta_0(\mathcal{P})\mathrm{d}_{(1,n-r)}\mathcal{Q} + \delta_1(\mathcal{P})\mathrm{d}_{(0,n-r+1)}\mathcal{Q}\Big)\\ &\times l_{\mathcal{A}_\mathcal{Q}}((\mathcal{A}/I_0(V_i,\mathcal{P}))_\mathcal{Q}).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Appliquons au côté gauche de (2.45) la majoration (2.41) et au côté droit la minoration (2.42). Nous obtenons

$$(n+1)\delta_0(\mathcal{P})(\rho_i\delta_1(\mathcal{P}))^r \geq \frac{\delta_0(\mathcal{P})\delta_1(\mathcal{P})^r}{n!} m(I_0(V_i,\mathcal{P})) \tag{2.46}$$

Maintenant nous déduisons (2.39) de (2.46) par simplification et en remarquant $r \leq n+1$.■

2.2.2 Estimation de $m(I_0(V_i,\mathcal{P}))$. Le cas $\nu_1 \neq 0$.

Dans ce sous-paragraphe nous considérons le cas $\nu_1 \neq 0$.

Lemme 2.21. *Soit I un idéal bi-homogène propre de $\mathcal{A}$, $I \neq \mathcal{A}$ et $\delta_0 = \delta_0(I)$, $\delta_1 = \delta_1(I)$ comme dans la définition 1.15.*

Soit $W \subsetneq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ une variété irréductible qui se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$ telle que

$$\begin{aligned}&\delta_1\mathrm{d}_{(0,\dim W)}W + \left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right)\dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)}W\\ &\qquad < \frac{\left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right)\left(\min\left(1, \frac{\nu_1}{4\nu_0}\right)\delta_1\right)^{\mathrm{codim}(W)}}{2^{\mathrm{codim}(W)}n!},\end{aligned} \tag{2.47}$$

alors, il existe un polynôme $Q \in \mathcal{I}(W) \setminus I$ satisfaisant les deux inégalités :

$$\begin{aligned}\deg_{\underline{X}'} Q &\leq \delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right] - 1,\\ \deg_{\underline{X}} Q &\leq \left[\frac{\delta_1}{2}\right].\end{aligned} \tag{2.48}$$

Démonstration. Remarquons que si $\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1 = 0$ ou $\delta_1 = 0$, alors une variété W satisfaisant (2.47) n'existe pas : le membre de droite est nul et ne peut majorer strictement celui de gauche. On peut donc supposer $\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1 > 0$ et $\delta_1 \geq 1$. Comme W se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$, on a

$$\mathrm{d}_{(1,\dim W-1)}W \geq 1, \tag{2.49}$$

et donc le membre de gauche de (2.47) est au moins $\left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right)\dim W \geq \delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1$. Ainsi on peut supposer

$$\left(\min\left(1, \frac{\nu_1}{4\nu_0}\right)\delta_1\right)^{\mathrm{codim}(W)} \geq 2^{\mathrm{codim}(W)}n!. \tag{2.50}$$

Cette dernière inégalité implique $\frac{\nu_1}{2\nu_0}\delta_1 \geq 2$ et ainsi

$$\left[\frac{\nu_1}{2\nu_0}\delta_1\right] \geq \frac{\nu_1}{4\nu_0}\delta_1 \geq 1. \tag{2.51}$$

De plus (2.50) implique

$$\delta_1 \geq 2. \tag{2.52}$$

Si un polynôme $Q_0 \neq 0$ de bi-degré $\left(\delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right] - 1, \left[\frac{\delta_1}{2}\right]\right)$ s'annule sur W, il satisfait toutes les conditions de la conclusion du lemme 2.21 qui dans ce cas se trouve établi. En effet, Q_0 ne peut pas appartenir à I car on a

$$\begin{aligned}\mu\left[\frac{\delta_1}{2}\right]\mathrm{d}_{(0,\dim I)}I + \nu_0\left(\delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right] - 1\right)\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)}I + \nu_1\left[\frac{\delta_1}{2}\right]\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)}I \\ < \mu\delta_1\mathrm{d}_{(0,\dim I)}I + \nu_0\delta_0\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)}I + \nu_1\delta_1\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)}I\end{aligned} \tag{2.53}$$

et le membre de droite de (2.53) minimise l'expression

$$\mu\deg_{\underline{X}}(Q)\mathrm{d}_{(0,\dim I)}I + \nu_0\deg_{\underline{X}'}(Q)\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)}I + \nu_1\deg_{\underline{X}}(Q)\mathrm{d}_{(1,\dim I-1)}I$$

pour les formes Q bi-homogènes appartenant à $I\setminus\{0\}$ (cf. la définition 1.15).

Il nous reste à éliminer le cas où aucun polynôme non nul de bi-degré $\left(\delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right] - 1, \left[\frac{\delta_1}{2}\right]\right)$ s'annule sur W. Sous cette hypothèse, on a la minoration

$$\begin{aligned}H_g\left(W, \delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right] - 1, \left[\frac{\delta_1}{2}\right]\right) &\geq \left(\delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right]\right)\binom{\left[\frac{\delta_1}{2}\right]+n}{n} \\ &\geq \left(\delta_0 + \frac{\nu_1\delta_1}{4\nu_0}\right)\frac{(\delta_1/2)^n}{n!} \\ &\geq \left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right)\frac{\delta_1^n}{2^{n+2}n!}\end{aligned} \tag{2.54}$$

en utilisant (2.51).

Dans le même temps, par l'estimation du corollaire 9 de [43] on a

$$\begin{aligned} H_g\left(W, \delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right] - 1, \left[\frac{\delta_1}{2}\right]\right) \leq \left[\frac{\delta_1}{2}\right]^{\dim W} \mathrm{d}_{(0,\dim W)}W \\ + \left(\delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right] - 1\right)\left[\frac{\delta_1}{2}\right]^{\dim W - 1} \dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)}W \\ + \dim W. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Comme on a (2.49) et (2.52), nous pouvons affaiblir (2.55) en

$$\begin{aligned} H_g\left(W, \delta_0 + \left[\frac{\nu_1\delta_1}{2\nu_0}\right] - 1, \left[\frac{\delta_1}{2}\right]\right) \leq \frac{1}{2^{\dim W - 1}}\Bigg(\delta_1^{\dim W} \mathrm{d}_{(0,\dim W)}W \\ + \left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right)\delta_1^{\dim W-1} \dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)}W\Bigg). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Les inégalités (2.54) et (2.56) impliquent

$$\begin{aligned} \delta_1 \mathrm{d}_{(0,\dim W)}W + \left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right) \dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)}W \\ \geq \left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right)\frac{\delta_1^{\mathrm{codim} W}}{2^{\mathrm{codim} W + 1} n!} \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité contredit l'hypothèse (2.47).■

Corollaire 2.22. *Dans la situation du lemme 2.21 si I est radical et si une variété irréductible W se projetant surjectivement sur $\mathbb{P}^1$ contient $\mathcal{V}(I)$, alors*

$$\begin{aligned} \delta_1 \mathrm{d}_{(0,\dim W)}W + \left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right) \dim W \mathrm{d}_{(1,\dim W-1)}W \\ \geq \frac{\left(\delta_0 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1\right)\left(\min\left(1, \frac{\nu_1}{4\nu_0}\right)\delta_1\right)^{\mathrm{codim}(W)}}{2^{\mathrm{codim}(W)} n!}, \end{aligned} \tag{2.57}$$

Démonstration. C'est un corollaire immédiat du lemme 2.21.■

Corollaire 2.23. *Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ un idéal premier tel que $\mathcal{V}(\mathcal{P}) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$. Avec la notation $V_i = V_i(\mathcal{P})$ et ρ_i introduite dans la définition 2.12, on a (rappelons $I_0(V_i, \mathcal{P}) = (V_i\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{A}$, cf. définition 2.3)*

$$m(I_0(V_i, \mathcal{P})) \leq \max\left(1, \frac{4\nu_0}{\nu_1}\right)^{n+1} 2^{n+2}(n+1)!\rho_i^{n+1}. \tag{2.58}$$

Démonstration. Notons $r = \mathrm{rg} I_0(V_i, \mathcal{P})$. L'idéal $I_0(V_i, \mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$, étant étendu-contracté par localisation en $\mathcal{P}$ d'un idéal engendré par des polynômes de bi-degré $\left(\rho_i(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})), \rho_i\delta_1(\mathcal{P})\right)$, satisfait d'après le théorème de Bézout

$$\begin{aligned}(n-r+1)\rho_i\left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right)(\rho_i\delta_1(\mathcal{P}))^{n-r}\mathrm{d}_{(1,n-r)}\left(I_0(V_i,\mathcal{P})\right)\\ + (\rho_i\delta_1(\mathcal{P}))^{n-r+1}\mathrm{d}_{(0,n-r+1)}\left(I_0(V_i,\mathcal{P})\right)\\ \leq (n+1)\rho_i^{n+1}\left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right)(\delta_1(\mathcal{P}))^n, \quad (2.59)\end{aligned}$$

puis en simplifiant des deux côtés le facteur $\rho_i^{n-r+1}\delta_1(\mathcal{P})^{n-r}$

$$\begin{aligned}(n-r+1)\left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right)\mathrm{d}_{(1,n-r)}\left(I_0(V_i,\mathcal{P})\right)\\ + \delta_1(\mathcal{P})\mathrm{d}_{(0,n-r+1)}\left(I_0(V_i,\mathcal{P})\right)\\ \leq (n+1)\left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right)(\rho_i\delta_1(\mathcal{P}))^r. \quad (2.60)\end{aligned}$$

Soit $W = \mathcal{V}(\mathcal{Q})$, où $\mathcal{Q}$ est un premier (non nécessairement minimal) associé à $\mathcal{V}(I_0(V_i, \mathcal{P}))$. Par construction de $I_0(V_i, \mathcal{P})$ tous ses premiers associés sont contenus dans $\mathcal{P}$, ainsi $\mathcal{V}(\mathcal{P}) \subset W$ et comme $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$, la variété W aussi. En appliquant le corollaire 2.22 nous obtenons que W satisfait (2.57), ou autrement-dit tout premier $\mathcal{Q}$ associé à $I_0(V_i, \mathcal{P})$ satisfait

$$\begin{aligned}\delta_1(\mathcal{P})\mathrm{d}_{(0,n+1-\mathrm{rg}\mathcal{Q})}\mathcal{Q} + (n+1-\mathrm{rg}\mathcal{Q})\left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1(\mathcal{P})\right)\mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q})}\mathcal{Q}\\ \geq \frac{\left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1(\mathcal{P})\right)\left(\min\left(1, \frac{\nu_1}{4\nu_0}\right)\delta_1(\mathcal{P})\right)^{\mathrm{codim}(W)}}{2^{\mathrm{codim}(W)}n!}. \quad (2.61)\end{aligned}$$

Mais

$$\mathrm{d}_{(1,n-r)}(I_0(V_i,\mathcal{P})) = \sum_{\substack{\mathcal{Q}\in\mathrm{Spec}\mathcal{A},\\ \mathrm{rg}(\mathcal{Q})=r}} \mathrm{d}_{(1,n-r)}(\mathcal{Q}) l_{\mathcal{A}_\mathcal{Q}}((\mathcal{A}/I_0(V_i,\mathcal{P}))_\mathcal{Q}), \quad (2.62)$$

et

$$\mathrm{d}_{(0,n-r+1)}(I_0(V_i,\mathcal{P})) = \sum_{\substack{\mathcal{Q}\in\mathrm{Spec}\mathcal{A},\\ \mathrm{rg}(\mathcal{Q})=r}} \mathrm{d}_{(0,n-r+1)}(\mathcal{Q}) l_{\mathcal{A}_\mathcal{Q}}((\mathcal{A}/I_0(V_i,\mathcal{P}))_\mathcal{Q}). \quad (2.63)$$

En sommant l'égalité (2.62) avec le coefficient

$$(n-r+1)\left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right)$$

et l'égalité (2.63) avec le coefficient $\delta_1(\mathcal{P})$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(n-r+1)\left(\delta_0(\mathcal{P})+\frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right)\mathrm{d}_{(1,n-r)}(I_0(V_i,\mathcal{P}))\\
&\quad+\delta_1(\mathcal{P})\mathrm{d}_{(0,n-r+1)}(I_0(V_i,\mathcal{P}))\\
&=\sum_{\substack{\mathcal{Q}\in\mathrm{Spec}\mathcal{A},\\ \mathrm{rg}(\mathcal{Q})=r}}\Bigg((n-r+1)\left(\delta_0(\mathcal{P})+\frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right)\mathrm{d}_{(1,n-r)}\mathcal{Q}\\
&\qquad\qquad+\delta_1(\mathcal{P})\mathrm{d}_{(0,n-r+1)}\mathcal{Q}\Bigg)l_{\mathcal{A}_\mathcal{Q}}((\mathcal{A}/I_0(V_i,\mathcal{P}))_\mathcal{Q}).
\end{aligned}\tag{2.64}$$

Appliquons au côté gauche de (2.64) la majoration (2.60) et au côté droit la minoration (2.61) à chaque terme de la somme. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(n+1)\left(\delta_0(\mathcal{P})+\frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right)(\rho_i\delta_1(\mathcal{P}))^r\\
&\quad\geq\frac{\left(\delta_0(\mathcal{P})+\frac{\nu_1}{\nu_0}\delta_1(\mathcal{P})\right)\left(\min\left(1,\frac{\nu_1}{4\nu_0}\right)\delta_1(\mathcal{P})\right)^r}{2^{r+1}n!}m(I_0(V_i,\mathcal{P})).
\end{aligned}\tag{2.65}$$

Maintenant nous déduisons (2.58) de (2.65) par simplification et en remarquant $r\leq n+1$.■

2.2.3 Démonstration du lemme de multiplicité formel.

Rappelons les définitions 2.12 et 2.13 où sont introduites l'indice $i_0(W)$ et les constantes ρ_i. Rappelons aussi les formules (2.1) et (2.4) où sont introduites les paramètres μ, ν_0, ν_1 et λ.

Résumons les résultats des sous-paragraphes 2.2.1 et 2.2.2 :

Lemme 2.24. *Soit $\mathcal{P}\subset\mathcal{A}$ un idéal premier bi-homogène tel que $\mathcal{V}(\mathcal{P})\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^n$ se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$. Avec les notations ν, $V_i=V_i(\mathcal{P})$ et ρ_i introduite dans la définition 2.12, on a (rappelons $I_0(V_i,\mathcal{P})=(V_i\mathcal{A}_\mathcal{P})\cap\mathcal{A}$, cf. définition 2.3)*

$$m(I_0(V_i,\mathcal{P}))\leq\nu(n+1)!\rho_i^{n+1}.\tag{2.66}$$

Démonstration. Le résultat découle directement des corollaires 2.20 et 2.23.■

Proposition 2.25. *Soit $P\in\mathcal{A}$ et $C\in\mathbb{R}$ satisfaisant :*

$$C<\frac{\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P\circ\tilde{\underline{\mathbf{f}}})-(\deg_{\underline{X}}P)\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{f}})-\deg_{\underline{X}'}P}{n\left((\nu_0+\mu)(\deg_{\underline{X}'}P+1)+\nu_1\deg_{\underline{X}}P\right)\mu^{n-1}(\deg_{\underline{X}}P+1)^n}\tag{2.67}$$

$$C\geq(\min(\nu_0,\mu))^{-n}.\tag{2.68}$$

Notons $\mathcal{P} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}_C(P))$ où $\mathcal{Z}_C(P)$ est le cycle introduit à la remarque 1.27. Supposons que pour $i = i_0(\mathcal{Z}_C(P))$ on ait

$$e_\phi(V_i(\mathcal{P}), \mathcal{P}) \leq m(I_0(V_i(\mathcal{P}), \mathcal{P})), \tag{2.69}$$

alors

$$C \leq \frac{(2\rho_{n+1})^n c_n^{n-1}}{\min(1;\lambda)^n \min(1;\mu)^n}. \tag{2.70}$$

De plus pour tout polynôme $P \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} P(\tilde{\underline{\mathbf{f}}}(\mathbf{z})) \leq \max & \left(\frac{n}{(\min(\nu_0,\mu))^n}, \frac{(2\rho_{n+1})^n c_n^{n-1}}{\min(1;\lambda)^n \min(1;\mu)^n} \right) \\ & \times \Big((\mu+\nu_0)(\deg_{\underline{X}'} P + 1) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} P \Big) \mu^{n-1} (\deg_{\underline{X}} P + 1)^n \\ & + (\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \underline{\mathbf{f}})(\deg_{\underline{X}} P) + \deg_{\underline{X}'} P \end{aligned} \tag{2.71}$$

(pour la notation $\tilde{\underline{\mathbf{f}}}$ voir (1.21)).

Démonstration. Remarquons que si $\deg_{\underline{X}} P = 0$ la conclusion de la proposition est automatiquement satisfaite. Donc il nous suffit de traiter le cas $\deg_{\underline{X}} P \geq 1$.

Ad absurdum supposons

$$C > \frac{(2\rho_{n+1})^n c_n^{n-1}}{\min(1;\lambda)^n \min(1;\mu)^n}. \tag{2.72}$$

Rappelons que $i_0(\mathcal{Z}_C(P)) \geq 1$ est le plus grand indice $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $\mathrm{rg}(V_i \mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \geq i$ (cf. la définition 2.13). On pose e_0 le plus grand entier $\leq e_\phi(V_{i_0}, \mathcal{P})$ tel que $V_{i_0} + ... + \phi^{e_0}(V_{i_0}) \subset \mathcal{P}$ (où on note $V_{i_0} = V_{i_0}(\mathcal{P})$). Remarquons que grâce à l'hypothèse (2.69), $e_\phi(V_{i_0}, \mathcal{P})$ est fini, et e_0 est un entier bien défini.

Soit Q un générateur de $\phi^{e_0}(V_{i_0})$ de sorte que par le lemme 2.1 on a

$$\begin{aligned} &\deg_{\underline{X}} Q \leq \mu^{e_0} \rho_{i_0} \delta_1(\mathcal{P}), \\ &\deg_{\underline{X}'} Q \leq (\nu_0 \delta_0(\mathcal{P}) + e_0 \nu_1 \delta_1(\mathcal{P})) \max(\nu_0, \mu)^{e_0 - 1} \rho_{i_0}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Par la substitution $(X_0' : X_1') = (1 : \mathbf{z})$ nous pouvons considérer Q comme un polynôme $\mathbf{Q}$ de $\mathbb{k}[\mathbf{z}][X_0 : ... : X_n]$. Notons $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_C(P)$.

Soit $\alpha \in \mathbf{Z}$. Par le lemme 1.22, b), il existe un système de coordonnées projectives $\underline{\alpha}$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \underline{\alpha} &= \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \underline{\mathbf{f}}, \\ \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\alpha} - \underline{\mathbf{f}}) - \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{f}}) &= \mathrm{Ord}_{z=0}(\alpha, \mathbf{f}). \end{aligned}$$

Vu $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \underline{\mathbf{f}} = 0$, on déduit immédiatement

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \underline{\alpha} = 0, \tag{2.74}$$

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\alpha} - \underline{\mathbf{f}}) = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\alpha} \wedge \underline{\mathbf{f}}). \tag{2.75}$$

Fixons un choix de systèmes de coordonnées projectives satisfaisant (2.74) et (2.75) pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}$.

On vérifie :

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\alpha})) \geq \min(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\mathbf{f}})), \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\alpha} \wedge \underline{\mathbf{f}})) \tag{2.76}$$

car

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\alpha})\right) &= \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left((\phi(\mathbf{Q})(\underline{\alpha}) - \phi(\mathbf{Q})(\underline{\mathbf{f}})) + \phi(\mathbf{Q})(\underline{\mathbf{f}})\right)\\ &\geq \min\left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\alpha}) - \phi(\mathbf{Q})(\underline{\mathbf{f}})\right), \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\mathbf{f}})\right)\right)\\ &\geq \min\left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\underline{\alpha} - \underline{\mathbf{f}}\right), \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\mathbf{f}})\right)\right)\\ &\geq \min\left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\underline{\alpha} \wedge \underline{\mathbf{f}}\right), \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\mathbf{f}})\right)\right),\end{aligned}$$

puis par (2.4) et vu que $\mathbf{Q}(\underline{\alpha}) = 0$ d'après le choix de e_0,

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\mathbf{f}})\right) &\geq \lambda \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}})\\ &\geq \lambda \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\big(\mathbf{Q}(\underline{\mathbf{f}}) - \mathbf{Q}(\underline{\alpha})\big)\\ &\geq \lambda \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\underline{\alpha} \wedge \underline{\mathbf{f}}\right)\end{aligned} \tag{2.77}$$

On en déduit pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}$

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\alpha})) \geq \min(1, \lambda)\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\alpha} \wedge \underline{\mathbf{f}}). \tag{2.78}$$

Par (2.78) on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\min(1,\lambda)} \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}_C(P)} \left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\alpha})\right)\right)\\ &\geq \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}_C(P)} (\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\alpha} \wedge \underline{\mathbf{f}})) =: M\end{aligned} \tag{2.79}$$

(noter que M est égale au côté gauche de l'inégalité (1.47)). Par définition de $\mathbf{Z}_C(P)$ (cf. la définition 1.26 et remarque 1.27) et avec (2.72) il vient

$$\begin{aligned}M > C^{\frac{1}{n}} c_n^{-\frac{n-1}{n}} &\Big(\nu_0 \deg(\mathbf{Z}) \deg_{\mathbf{z}} P + \nu_1 \deg(\mathbf{Z}) \deg_{\underline{X}} P + \mu h(\mathbf{Z}) \deg_{\underline{X}} P\Big)\\ &\geq \frac{2\rho_{n+1}}{\min(1,\lambda)\min(1,\mu)} \Big(\nu_0 \deg(\mathbf{Z}) \deg_{\mathbf{z}} P\\ &\qquad + \nu_1 \deg(\mathbf{Z}) \deg_{\underline{X}} P + \mu h(\mathbf{Z}) \deg_{\underline{X}} P\Big).\end{aligned} \tag{2.80}$$

On déduit de (2.79), (2.80) et tenant compte de (2.72)

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{\beta} \in \mathbf{Z}_C(P)} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \Big(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\beta})\Big) &> \frac{2\rho_{n+1}}{\min(1,\mu)}\\ &\times \Big(\nu_0 \deg(\mathbf{Z}) \deg_{\mathbf{z}} P + \nu_1 \deg(\mathbf{Z}) \deg_{\underline{X}} P + \mu h(\mathbf{Z}) \deg_{\underline{X}} P\Big).\end{aligned} \tag{2.81}$$

Par ailleurs, par l'inégalité de la taille (1.20), si $\phi(\mathbf{Q})$ ne s'annule pas sur $\mathbf{Z}_C(P)$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\underline{\beta}\in\mathbf{Z}_C(P)} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\phi(\mathbf{Q})(\underline{\beta})\right) \le \deg(\mathbf{Z})h(\phi(\mathbf{Q})) + h(\mathbf{Z})\deg\phi(\mathbf{Q}) \\
&\le \max(\mu,\nu_0)^{e_0}\rho_{i_0}\left(\nu_0\deg(\mathbf{Z})\delta_0 + \nu_1(e_0+1)\deg(\mathbf{Z})\delta_1 + \mu h(\mathbf{Z})\delta_1\right) \\
&\le \max(\mu,\nu_0)^{e_0}(e_0+1)\rho_{i_0}\left(\nu_0\deg(\mathbf{Z})\delta_0 + \nu_1\deg(\mathbf{Z})\delta_1 + \mu h(\mathbf{Z})\delta_1\right)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

(la deuxième inégalité vient de (2.73)).

D'après la définition de e_0, l'hypothèse (2.69) et le lemme 2.24 on a

$$e_0 \le e_\phi(V_{i_0},\mathcal{P}) \le m(I_0(V_{i_0},\mathcal{P})) \le \nu(n+1)!\rho_{i_0}^{n+1}, \tag{2.83}$$

et ainsi $\max(\mu,\nu_0)^{e_0}(e_0+1)\rho_{i_0} \le \rho_{i_0+1} \le \rho_{n+1}$ par définition de ρ_{n+1}. Donc les inégalités (2.81) et (2.82) entraînent :

$$\begin{aligned}
&\frac{2\rho_{n+1}}{\min(1,\mu)}\left(\nu_0\deg(\mathbf{Z})\deg_{\mathbf{z}}P + \nu_1\deg(\mathbf{Z})\deg_{\underline{X}}P + \mu h(\mathbf{Z})\deg_{\underline{X}}P\right) \\
&\qquad\qquad < \rho_{n+1}\left(\nu_0\deg(\mathbf{Z})\delta_0 + \nu_1\deg(\mathbf{Z})\delta_1 + \mu h(\mathbf{Z})\delta_1\right).
\end{aligned}$$

Cette inégalité est contradictoire par la définition 1.15, il en résulte $\phi(\mathbf{Q})(\underline{\alpha}) = 0$.

Ainsi

$$\phi^{e_0+1}(V_{i_0}) \subset \mathcal{P}, \tag{2.84}$$

ce qui contredit la définition de e_0 si $e_0 < e_\phi(V_{i_0},\mathcal{P})$, et donc nécessairement $e_0 = e_\phi(V_{i_0},\mathcal{P})$. De plus, (2.84) implique

$$\mathrm{rg}\left((V_{i_0} + \ldots + \phi^{e_0+1}(V_{i_0}))\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\right) \le \mathrm{rg}\left(\mathcal{P}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\right) = n. \tag{2.85}$$

Comme on a $e_0+1 > e_\phi(V_{i_0},\mathcal{P})$ et par définition de $e_\phi(V_{i_0},\mathcal{P})$ nous obtenons

$$\mathrm{rg}\left((V_{i_0} + \ldots + \phi^{e_0+1}(V_{i_0}))\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\right) > \mathrm{rg}(V_{i_0}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \ge i_0, \tag{2.86}$$

et ainsi

$$\mathrm{rg}(V_{i_0+1}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \ge \mathrm{rg}\left((V_{i_0} + \ldots + \phi^{e_0+1}(V_{i_0}))\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\right) \ge i_0 + 1.$$

Si $i_0 < n$ ceci contredit la définition de i_0, et si $i_0 = n$ l'inégalité (2.86) montre

$$\mathrm{rg}\left((V_{i_0} + \ldots + \phi^{e_0+1}(V_{i_0}))\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\right) > n$$

contredisant (2.85).

On a donc vérifié que l'hypothèse (2.72) ne peut être satisfaite ce qui établit (2.70).

Il nous reste à vérifier (2.71). Fixons un polynôme P quelconque. Considérons l'ensemble $\mathcal{M}(P)$ des réels C satisfaisant les estimations (2.67) et (2.68) (avec notre polynôme P fixé). Si $\mathcal{M}(P) = \emptyset$, nous avons

$$(\min(\nu_0, \mu))^{-n} \geq \frac{\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P \circ \tilde{\underline{\mathbf{f}}}) - (\deg_{\underline{X}} P)\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{f}}) - \deg_{\underline{X}'} P}{n\left((\mu+\nu_0)(\deg_{\underline{X}'} P + 1) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} P\right)\mu^{n-1}(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n}$$

d'où on déduit immédiatement (2.71).

Au cas contraire, si $\mathcal{M}(P) \neq \emptyset$, notons C_s la borne supérieure de $\mathcal{M}(P)$, c'est un nombre réel fini : l'estimation (2.67) montre

$$C_s = \frac{\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P \circ \tilde{\underline{\mathbf{f}}}) - (\deg_{\underline{X}} P)\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{f}}) - \deg_{\underline{X}'} P}{n\left((\mu+\nu_0)(\deg_{\underline{X}'} P + 1) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} P\right)\mu^{n-1}(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n}.$$

Nous avons établi l'estimation (2.70) pour tout élément de $\mathcal{M}(P)$, donc C_s aussi satisfait cette estimation, d'où (2.71). ■

Lemme 2.26. (Cf. [43], §7, lemme 13). *Soit $\mathcal{P}$ un premier de $\mathcal{A}$ tel que la transformation ϕ est correcte par rapport à $\mathcal{P}$ et soit $V \subset \mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{A}$ sur $\Bbbk$. Si $e_\phi(V, \mathcal{P}) > m(I_0(V, \mathcal{P}))$, alors il existe un idéal equidimensionnel ϕ-stable J tel que*

a) $I_0(V, \mathcal{P}) \subset J \subset \mathcal{P}$,

b) $\mathrm{rg}(J) = \mathrm{rg}(I_0(V, \mathcal{P}))$,

c) Tous les premiers associés à J sont contenus dans $\mathcal{P}$.

En particulier,

$$\begin{aligned} &m(J) \leq m(I_0(V, \mathcal{P})),\\ &\mathrm{d}_{(1, n-\mathrm{rg}J)}J \leq \mathrm{d}_{(1, n-\mathrm{rg}I_0(V,\mathcal{P}))}(I_0(V, \mathcal{P})),\\ &\mathrm{d}_{(0, n-\mathrm{rg}J+1)}J \leq \mathrm{d}_{(0, n-\mathrm{rg}I_0(V,\mathcal{P})+1)}(I_0(V, \mathcal{P})).\end{aligned} \tag{2.87}$$

Démonstration. Notons $m = m(I_0(V, \mathcal{P}))$, et pour tout $e = 0, 1, 2, \ldots$ notons $\tilde{J}_e = I_e(V, \mathcal{P})$, $J_e = \mathrm{eq}(\tilde{J}_e)$. Vu ces définitions on a

$$\tilde{J}_e \subset \tilde{J}_{e+1} \subset J_{e+1} \qquad e = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.88}$$

Remarquons que si $\mathrm{rg}(\tilde{J}_{e+1}) = \mathrm{rg}(\tilde{J}_e)$, ou autrement-dit si $\mathrm{rg}(J_{e+1}) = \mathrm{rg}(J_e)$, on a $J_{e+1} \supset J_e$ (car on a toujours $\tilde{J}_{e+1} \supset \tilde{J}_e$).

Si $\phi^{e+1}(V) \not\subseteq J_e$, alors soit $\mathrm{rg}(J_{e+1}) > \mathrm{rg}(J_e)$ soit $\mathrm{rg}(J_{e+1}) = \mathrm{rg}(J_e)$ et $m(J_{e+1}) < m(J_e)$. En effet, dans cette situation il y a dans J_{e+1} un élément x qui n'est pas dans J_e (car $J_{e+1} \supset \tilde{J}_{e+1} \supset \phi^{e+1}(V)$) et qui donc est soit un non-diviseur de zéro dans $\mathcal{A}/J_e$ et alors $\mathrm{rg}(J_{e+1}) > \mathrm{rg}(J_e)$, soit n'appartient pas à au moins une des composantes primaires de l'idéal équidimensionnel J_e. Dans ce deuxième cas on a, comme remarqué ci-dessus, $J_e \subset J_{e+1}$ et toute composante primaire de J_{e+1} contient une composante primaire de J_e (sinon par localisation on ne peut avoir $J_e \subset J_{e+1}$). Donc pour tout $\mathcal{Q} \subset \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ on a $l_{\mathcal{A}_\mathcal{Q}}((\mathcal{A}/J_{e+1})_\mathcal{Q}) \leq l_{\mathcal{A}_\mathcal{Q}}((\mathcal{A}/J_e)_\mathcal{Q})$ et vu (2.25) on a déjà $m(J_{e+1}) \leq m(J_e)$. Mais, il existe un élément $x \in J_{e+1}$ n'appartenant pas à une composante primaire de J_e de radical disons $\mathcal{P}$, on a alors $l_{\mathcal{A}_\mathcal{P}}((\mathcal{A}/J_{e+1})_\mathcal{P}) < l_{\mathcal{A}_\mathcal{P}}((\mathcal{A}/J_e)_\mathcal{P})$ et ainsi $m(J_{e+1}) < m(J_e)$.

Par définition de $e_\phi(V, \mathcal{P})$ (cf. la définition 2.15) on a

$$\mathrm{rg}\,(J_e) = \mathrm{rg}\,(J_0) \text{ pour tout } e = 0, ..., e_\phi(V, \mathcal{P}). \tag{2.89}$$

Comme $e_\phi(V, \mathcal{P}) \geq m$, si $\phi^{e+1}(V) \not\subseteq J_e$ pour $e = 0, ..., m-1$, on a

$$1 \leq m(J_m) < m(J_{m-1}) < \cdots < m(J_0) = m, \tag{2.90}$$

donc on a $m+1$ entiers $m(J_0), \ldots, m(J_m)$ deux à deux distincts entre 1 et m, ceci étant impossible il existe $0 \leq e_0 \leq m-1$ tel que

$$\phi^{e_0+1}(V) \subset J_{e_0}. \tag{2.91}$$

On a donc (vu la définition de l'idéal $\tilde{J}_{e_0}$)

$$\phi(\tilde{J}_{e_0}) \subset \left(\tilde{J}_{e_0} + \phi^{e_0+1}(V)\right) \mathcal{A}_\mathcal{P} \cap \mathcal{A} \subset J_{e_0} + J_{e_0} \subset J_{e_0}, \tag{2.92}$$

car $\tilde{J}_{e_0} \subset J_{e_0}$ par définition de ce dernier.

Comme ϕ est correcte par rapport à $\mathcal{P}$ (et par construction de J_{e_0} tous ces premiers associés sont contenus dans $\mathcal{P}$), (2.92) implique

$$\phi(J_{e_0}) \subset J_{e_0},$$

donc l'idéal équidimensionnel J_{e_0} est ϕ-stable.

Montrons maintenant que le choix $J = J_{e_0}$ démontre le lemme.

La construction de J_{e_0} montre que tous les premiers associés à J_{e_0} sont contenus dans $\mathcal{P}$, ce qui démontre le point c). Puis, avec la remarque évidente $I_0(V, \mathcal{P}) = \tilde{J}_0 \subset J_{e_0}$ vient le point a).

Le point b) est démontré par (2.89).

Ainsi l'idéal $J = J_{e_0}$ satisfait toutes les propriétés demandées, (2.87) résultant de a), b) et c).■

Démonstration du théorème 2.16. Posons

$$C = 1 + \max\left(c_n^{n-1} C_0^n, (\min(\nu_0, \mu))^{-n}, C_{\text{iso}}, \right.$$
$$\left. \left(n! c_n \left(1 + \frac{\nu_1}{\max(\mu, \nu_0)}\right) \rho_n^n K_0\right)^n, C_1\right) \tag{2.93}$$

(rappelons que c_n est défini en (1.42), C_0, C_1, K_0 proviennent de l'énoncé du théorème 2.16 (hypothèses (2.27), (2.29)), C_{iso} provient de la remarque 1.28). Soit $P \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ un polynôme ne satisfaisant pas (2.30) pour

$$K = \max\left(2nC, \left(\frac{2\rho_{n+1}c_n}{\max(1,\lambda)\max(1,\mu)}\right)^n\right). \tag{2.94}$$

Alors il satisfait (1.52). En particulier, C et P satisfont aux conditions (2.67) et (2.68) de la proposition (2.25).

Notons $\mathcal{P} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}_C(P))$, où $\mathcal{Z}_C(P)$ est le cycle introduit à la remarque 1.27. Vu (1.47) et (2.93), on a $\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{P} > C_0$ et donc, d'après l'hypothèse (2.26), ϕ est correcte par rapport à $\mathcal{P}$. De plus, $\mathcal{Z}_C(P)$ se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$ (cf. la remarque 1.28).

Si pour $i = i_0(\mathcal{Z}_C(P))$ on a

$$e_\phi(V_i, \mathcal{P}) \leq m(I_0(V_i, \mathcal{P})), \tag{2.95}$$

où $V_i = V_i(\mathcal{Z}_C(P))$ est introduit à la définition (2.12) et e_ϕ, m sont donnés à la définition 2.15 : (2.24) et (2.25) respectivement, nous vérifions (2.69) et nous pouvons appliquer la proposition 2.25 qui donne (2.30) vu notre choix de K. Ceci contredit notre hypothèse que P ne satisfait pas (2.30). Si en revanche (2.95) n'est pas satisfaite, nous appliquons le lemme 2.26 à l'idéal $\mathcal{P}$ et l'espace vectoriel $V = V_i(\mathcal{P})$ (où nous désignons toujours $i = i_0(\mathcal{Z}_C(P))$).

Notons J l'idéal équidimensionnel ϕ-stable fournit par le lemme 2.26. Vu la propriété b) de cette proposition nous avons $\mathrm{rg}J = \mathrm{rg}\,(V_i) \geq i \geq n_1$.

On vérifie (vu (2.87))

$$\begin{aligned} &m(J) \leq m(I_0(V, \mathcal{P})), \\ &\mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}J+1)}(J) \leq \mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}J+1)}(I_0(V_i, \mathcal{P})). \end{aligned} \tag{2.96}$$

Comme $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = Z_C(P)$ se projette surjectivement sur $\mathbb{P}^1$ on a de plus par le lemme 2.24

$$m(I_0(V, \mathcal{P})) \leq \nu(n+1)!\rho_i^{n+1}$$

et aussi $\delta_1(\mathcal{P}) \geq 1$.

Rappelons que $I_0(V_i, \mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ et donc

$$\mathrm{rg}I_0(V_i, \mathcal{P}) \leq \mathrm{rg}\mathcal{P} = n.$$

Comme l'idéal $I_0(V_i, \mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ est étendu-contracté d'un idéal engendré par des polynômes de bi-degré $\leq \left(\rho_i\left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right), \rho_i\delta_1(\mathcal{P})\right)$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}I_0(V_i,\mathcal{P})+1)}(I_0(V_i, \mathcal{P})) &\leq \left(\delta_0(\mathcal{P}) + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\delta_1(\mathcal{P})\right) \\ &\qquad \times \delta_1(\mathcal{P})^{\mathrm{rg}I_0(V_i,\mathcal{P})-1}\rho_i^{\mathrm{rg}I_0(V_i,\mathcal{P})} \\ &\leq \left(1 + \frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\right)\rho_n^n \\ &\qquad \times (\delta_0(\mathcal{P})+1)(\delta_1(\mathcal{P})+1)^{\mathrm{rg}I_0(V_i,\mathcal{P})}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

d'où finalement

$$\mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}J+1)}J \leq \left(1+\frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\right)\rho_n^n\left(\delta_0(\mathcal{P})+1\right)\left(\delta_1(\mathcal{P})+1\right)^{\mathrm{rg}J}. \quad (2.98)$$

Comme J est un idéal équidimensionnel, pour tout $\mathcal{Q} \in \mathrm{Ass}(\mathcal{A}/J)$ nous avons donc

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q}+1)}\mathcal{Q} &\leq \mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}J+1)}J\\ &\leq \left(1+\frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\right)\rho_n^n\left(\delta_0(\mathcal{P})+1\right)\left(\delta_1(\mathcal{P})+1\right)^{\mathrm{rg}\mathcal{Q}}.\end{aligned} \quad (2.99)$$

Le calcul pareil pour $\mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q})}\mathcal{Q}$ donne

$$\mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q})}\mathcal{Q} \leq \rho_n^n\left(\delta_1(\mathcal{P})+1\right)^{\mathrm{rg}\mathcal{Q}}. \quad (2.100)$$

Comme P et C satisfont (1.52), par le lemme 1.29 il existe un point $\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}_C(P)$ satisfaisant l'estimation (1.55) avec $\tilde{C} = \frac{C^{\frac{1}{n}}\min(\nu_0,\mu)}{3n!c_n} \geq \left(1+\frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\right)\rho_n^nK_0$ (on a la dernière inégalité d'après la définition (2.93)), et donc pour tout $\mathcal{Q} \in \mathrm{Ass}(\mathcal{A}/J)$ (vu la propriété c) donnée dans le lemme 2.26)

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{Q} \geq \mathrm{ord}(\underline{\mathbf{f}},\underline{\alpha}) > \left(1+\frac{\nu_1}{\max(\mu,\nu_0)}\right)\rho_n^nK_0(\delta_0(\mathcal{P})+1)(\delta_1(\mathcal{P})+1)^n \quad (2.101)$$

Les estimations (2.99), (2.100) et (2.101) mises ensemble (et étant vraies pour *tout* $\mathcal{Q} \in \mathrm{Ass}(\mathcal{A}/J)$) contredisent (2.28). Ainsi l'hypothèse (1.52) avec C donné par (2.93) est intenable et nous en déduisons l'estimation (2.30) avec notre choix de K. À nouveau ceci contredit notre hypothèse que P ne satisfait pas (2.30).

Finalement, un polynôme P ne satisfaisant pas (2.30) ne peut exister, ce qui achève la démonstration.■

Remarque 2.27. Notre démonstration du théorème 2.16 nécessite en fait une condition plus faible que (2.28) :

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}(\mathcal{Q}) < K_0\mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q}+1)}(\mathcal{Q})\left(\delta_1(\mathcal{P})+1\right)^{n-\mathrm{rg}\mathcal{Q}}, \quad (2.102)$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'idéal du cycle $Z_C(P)$ à partir duquel nous construisons $\mathcal{Q}$. Si $\nu_0 = 0$, alors on a besoin d'une condition encore plus faible :

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}(\mathcal{Q}) < K_0\mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}\mathcal{Q}+1)}(\mathcal{Q})\left(\delta_1(\mathcal{P})+1\right)^{n-\mathrm{rg}\mathcal{Q}+1}. \quad (2.103)$$

Néanmoins il semble difficile dans le cas bi-projectif de lier la quantité $\delta_1(\mathcal{P})$ à $\mathcal{Q}$ de façon convenable.

En fait nous pouvons poursuivre la même ligne de démonstration dans le cas projectif, c'est-à-dire en considérant $\mathbf{z}$ comme une fonction (et alors

$\underline{\mathbf{f}} = (1, \mathbf{z}, f_1(\mathbf{z}), ..., f_n(\mathbf{z})))$. Dans ce cas on utilise au lieu de $\delta_0(\mathcal{P})$ et $\delta_1(\mathcal{P})$ une seule quantité, le minimum des degrés des polynômes non-nuls appartenant à $\mathcal{P}$. Dans ce cas l'idéal ϕ-stable I, que nous construisons dans la démonstration a tous ses premiers associés contenus dans $\mathcal{P}$ et tout premier associé à $\mathcal{Q}$ contient aussi un polynôme de degré $\delta(\mathcal{P})$ (en fait tous les polynômes de $\mathcal{P}$ de ce degré, par construction de I). Comme $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, on a nécessairement $\delta(\mathcal{Q}) \geq \delta(\mathcal{P})$, et par ailleurs comme $\mathcal{Q}$ contient un polynôme de degré $\delta(\mathcal{P})$, on a $\delta(\mathcal{Q}) \leq \delta(\mathcal{P})$, donc $\delta(\mathcal{Q}) = \delta(\mathcal{P})$.

Comme résultat nous obtenons alors la conclusion qu'il existe une constante K telle que pour tout polynôme non-nul on ait

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P(\underline{\mathbf{f}})) \leq K(\deg P + 1)^{n+1} \tag{2.104}$$

sous la condition analogue à (2.28) : il existe deux constantes réelles positives K_0, C_0 telles que que pour idéal ϕ-stable I, dont tous les premiers associés satisfont $\mathrm{Ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{Q} \geq C_0$, on a pour au moins un premier associé à I l'inégalité

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}(\mathcal{Q}) < K_0 \deg(\mathcal{Q}) \left(\delta(\mathcal{Q})\right)^{n-\mathrm{rg}\mathcal{Q}+1}. \tag{2.105}$$

Cette dernière condition est optimale au sens que si nous admettons l'estimation (2.104), nous pouvons établir (2.105) pour tout idéal premier homogène $\mathcal{Q}$ (pas nécessairement associé à un idéal ϕ-stable). En effet, par le corollaire 2 de [14] on a (pour tout idéal premier homogène $\mathcal{Q}$ dans l'anneau des polynômes en $n+1$ variables)

$$\delta(\mathcal{Q}) \leq (n! \deg(\mathcal{Q}))^{1/\mathrm{rg}\mathcal{Q}}. \tag{2.106}$$

Choisissons un polynôme $P_1 \in \mathcal{Q}$ de degré $\delta(\mathcal{Q})$. Comme $P_1 \in \mathcal{Q}$, on a

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{Q} \leq \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} P_1(\underline{\mathbf{f}}). \tag{2.107}$$

Maintenant les estimations (2.107), (2.104) et (2.106) nous donnent (2.105).

2.3 Application aux opérateurs différentiels

Dans ce paragraphe nous considérons un n-uplet $\underline{\mathbf{f}} = (f_1(\mathbf{z}), \dots, f_n(\mathbf{z}))$ des fonctions (ou des séries formelles) satisfaisant le système d'équations différentielles

$$f_i'(\mathbf{z}) = \frac{A_i(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{f}})}{A_0(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{f}})}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.108}$$

où $A_i(\mathbf{z}, X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{k}[\mathbf{z}, X_1, \dots, X_n]$ pour $i = 0, ..., n$.

On associe au système (2.108) l'opérateur différentiel

$$D = A_0(\mathbf{z}, X_1, \dots, X_n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + \sum_{i=1}^{n} A_i(\mathbf{z}, X_1, \dots, X_n) \frac{\partial}{\partial X_i}, \tag{2.109}$$

c'est une application $D : \Bbbk[\mathbf{z}, X_1, \ldots, X_n] \to \Bbbk[\mathbf{z}, X_1, \ldots, X_n]$. Nous considérerons également D comme agissant sur $\mathcal{A} = \Bbbk[X'_0, X'_1][X_1, \ldots, X_n]$ par :

$$D = {}^hA_0(X'_0, X'_1, X_1, \ldots, X_n)\frac{\partial}{\partial X'_1} + \sum_{i=1}^{n} {}^hA_i(X'_0, X'_1, X_1, \ldots, X_n)\frac{\partial}{\partial X_i}, \quad (2.110)$$

où ${}^hP$ désigne la bi-homogénisation du polynôme $P \in \Bbbk[\mathbf{z}, X_1, \ldots, X_n]$:

$${}^hP(X'_0, X'_1, X_1, \ldots, X_n) := X_0'^{\deg_{\mathbf{z}} P} \cdot X_0^{\deg_{\underline{X}} P} \cdot P\left(\frac{X'_1}{X'_0}, \frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

Il est facile de vérifier la relation $D({}^hP) = {}^h(D(P))$ et ainsi l'application $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ n'est autre que "la bi-homogénisation" de $D : \Bbbk[\mathbf{z}, X_1, \ldots, X_n] \to \Bbbk[\mathbf{z}, X_1, \ldots, X_n]$.

L'application D est une application correcte par rapport à tout idéal $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ d'après le corollaire 2.10).

Signalons, que la notion d'idéal D-stable (cf. la définition 2.6) coïncide avec la notion d'idéal différentiel (dans le cadre de l'algèbre différentielle) introduite, par exemple, dans [21].

Si nous désignons $M = \max_{i=0,\ldots,n} \deg A_i$, alors pour $\deg_{\underline{X}} Q \geq 1$, $\deg_{\underline{X}'} Q \geq 1$ nous avons les estimations (2.1) avec $\nu_0 = \mu = M + 1$ et $\nu_1 = 0$.

Nous déduisons du théorème 2.16 une amélioration du théorème suivant de Nesterenko :

Théorème 2.28. (cf. Théorème 1.1 de chapitre 10 de [32]) *Supposons que les fonctions*

$$\underline{\mathbf{f}} = (f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_n(\mathbf{z})) \in \mathbb{C}[[\mathbf{z}]]^n$$

sont analytiques en $\mathbf{z} = 0$ et forment une solution du système (2.108) avec $\Bbbk = \mathbb{C}$. S'il existe une constante K_0 telle que tout idéal premier D-stable $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}[X'_1, X_1, \ldots, X_n]$, $\mathcal{P} \neq (0)$, satisfait

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} P(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{f}}) \leq K_0, \quad (2.111)$$

alors il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{C}[X'_1, X_1, \ldots, X_n]$ on a

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{f}})) \leq K_1(\deg_{\underline{X}'} P + 1)(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n. \quad (2.112)$$

Remarque 2.29. En supposant $A_0(0, \underline{\mathbf{f}}(0)) \neq 0$ dans le système (2.108), il est facile de vérifier la condition (2.111), cf. [32], chapitre 10, exemple 1 (p. 150). Par ailleurs, la condition (2.111) est établie dans le cas où les polynômes A_i, $i = 0, \dots, n$ sont de degré 1 en $X_1, \dots, X_n$, cf. [28]. Dans ce cas la démonstration s'appuie sur la théorie de Galois différentielle.

Avec le théorème 2.16 nous pouvons remplacer la condition (2.111) du théorème 2.28 par une condition plus faible (voir (2.113) ci-dessous et (2.28)) en démontrant de plus un résultat valable en toute caractéristique.

Théorème 2.30. *Supposons que les séries formelles*

$$\underline{\mathbf{f}} = (f_1(\mathbf{z}), \dots, f_n(\mathbf{z})) \in \Bbbk[[\mathbf{z}]]^n$$

forment une solution du système (2.108) et soient $n_1 \in \{1, \dots, n\}$, $C_1 \in \mathbb{R}^+$. *Supposons qu'il existe une constante* K_0 *telle que tout idéal bi-homogène primaire* D*-stable* $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ *de rang* $\geq n_1$ *satisfait*

$$\mathrm{ord}_{\underline{\mathbf{f}}}\mathcal{P} \leq K_0 \left(\mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}\mathcal{P}+1)}\mathcal{P} + \mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{P})}\mathcal{P} \right), \tag{2.113}$$

ou, si char $\Bbbk = 0$, *nous supposons l'inégalité (2.113) seulement pour des idéaux bi-homogènes* premiers D*-stables* $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ *de rang* $\geq n_1$. *Alors il existe une constante* $K_1 > 0$ *telle que tout* $P \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ *satisfaisant pour tout* $C \geq C_1$

$$i_0(\mathcal{Z}_C(P)) \geq n_1 \tag{2.114}$$

satisfait aussi

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{f}})) \leq K_1(\deg_{\underline{X'}} P + 1)(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n. \tag{2.115}$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 2.16. La condition (2.26) est satisfaite car dans le cas considéré l'application $\phi = D$ est correcte par rapport à tout idéal (cf. corollaire 2.10).

Les fonctions $f_1(\mathbf{z}), \dots, f_n(\mathbf{z})$ sont algébriquement indépendantes sur $\Bbbk(\mathbf{z})$ car sinon l'idéal $\mathcal{P}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} \neq (0)$ étant D-stable (cf. la remarque 2.7) ne peut satisfaire (2.113).

Considérons un idéal bi-homogène équidimensionnel et D-stable $J \subset \mathcal{A}$, $J \neq (0)$. Soit $\mathcal{Q}$ un des facteurs primaires de J. Comme J est un idéal équidimensionnel, on peut présenter J comme $J = \mathcal{Q} \cap I$, où $I \not\subset \sqrt{\mathcal{Q}}$. Choisissons un élément $x \in I \setminus \sqrt{\mathcal{Q}}$.

Soit $a \in \mathcal{Q}$. Alors $xa \in J$ et, comme J est D-stable, on a

$$D(xa) \in J \subset \mathcal{Q}. \tag{2.116}$$

Comme D est une dérivation,

$$D(xa) = D(x)a + xD(a). \tag{2.117}$$

On a $D(x)a \in \mathcal{Q}$ (parce que $a \in \mathcal{Q}$), et ainsi (compte tenu de (2.116) et (2.117)) $xD(a) \in \mathcal{Q}$. Par notre choix de x ceci implique $D(a) \in \mathcal{Q}$ et donc $\mathcal{Q}$ est D-stable.

Si $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, nous pouvons déduire que $\sqrt{\mathcal{Q}}$ est D-stable. En effet, pour tout $a \in \sqrt{\mathcal{Q}}$ on a $a^n \in \mathcal{Q}$, et alors

$$D(a^n) \in \mathcal{Q}.$$

Mais $D(a^n) = nD(a^{n-1})$, et donc si $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ ceci implique $D(a^{n-1})\mathcal{Q}$. En répétant cette procédure nous arrivons à la conclusion $D(a) \in \mathcal{Q} \subset \sqrt{\mathcal{Q}}$, donc $\sqrt{\mathcal{Q}}$ est D-stable.

Maintenant l'hypothèse (2.113) assure immédiatement l'hypothèse (2.28). En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}\mathcal{P}+1)}\sqrt{\mathcal{Q}} &\leq \mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}\mathcal{P}+1)}\mathcal{Q} \leq \mathrm{d}_{(0,n-\mathrm{rg}\mathcal{P}+1)}\deg J,\\ \mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{P})}\sqrt{\mathcal{Q}} &\leq \mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{P})}\mathcal{Q} \leq \mathrm{d}_{(1,n-\mathrm{rg}\mathcal{P})}\deg J \end{aligned}$$

et pour au moins un des facteurs primaires de J on a

$$\operatorname{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}\sqrt{\mathcal{Q}} = \operatorname{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}\mathcal{Q} = \operatorname{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}J.$$

Ainsi nous pouvons appliquer le théorème 2.16 (avec la constante $C_0 = 0$, par exemple) qui nous donne la conclusion souhaitée.■

2.4 Application aux transformations birationnelles

Dans ce paragraphe nous allons considérer la transformation rationnelle $\mathcal{T}$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ définie par

$$\begin{aligned} (X_0' : X_1', X_0 : \ldots : X_n) \to \Big(&A_0'(X_0', X_1') : A_1'(X_0', X_1'),\\ &A_0(X_0', X_1', X_0, \ldots, X_n) : \ldots : A_n(X_0', X_1', X_0, \ldots, X_n)\Big), \end{aligned} \tag{2.118}$$

où $A_i' \in \Bbbk[X_0', X_1']$, $i = 0, 1$, sont des polynômes homogènes de degré r en $\underline{X}'$ et $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 0, \ldots, n$, sont des polynômes bi-homogènes de bi-degré (s, t) en $\underline{X}'$ et $\underline{X}$.

Remarque 2.31. A toute transformation rationnelle $\mathcal{T}$ définie par (2.118) et telle que A_0 et A_0' sont des polynômes non nuls on associe un système d'équations fonctionnelles (7) en posant $p(\mathbf{z}) = \frac{A_1'(1,\mathbf{z})}{A_0'(1,\mathbf{z})}$:

$$A_0(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z}))f_i(p(\mathbf{z})) = A_i(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z})), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.119}$$

(où $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}$ désigne $(1, \mathbf{z}, 1, f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_n(\mathbf{z}))$).

Réciproquement, à partir du système (7) (où $p(\mathbf{z}) \in \Bbbk(\mathbf{z})$ et on ne fait pas l'hypothèse que $\operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0}p \geq 2$) les formules (2.118) définissent un morphisme $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$.

Définition 2.32. Nous disons que le morphisme défini par (2.118) et le système (2.119) sont associés l'un à l'autre.

Définition 2.33. Nous disons qu'une sous-variété $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ est $\mathcal{T}$-stable, si

$$\overline{\mathcal{T}(W)} = W.$$

Théorème 2.34. *Soit* $\Bbbk$ *un corps commutatif de caractéristique quelconque et* $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk} \to \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ *une transformation rationnelle dominante définie comme dans (2.118), par des polynômes* A'_i*,* $i = 0, 1$ *homogènes en* $\underline{X}'$ *et de degré* r*, et des polynômes* A_i*,* $i = 0, \dots, n$ *bi-homogènes en* $\underline{X}'$ *et* $\underline{X}$*, de bi-degré* (s, t)*.*

Soient $f_1(\mathbf{z}),\dots,f_n(\mathbf{z}) \in \Bbbk[[\mathbf{z}]]$ *des séries formelles algébriquement indépendantes sur* $\Bbbk(\mathbf{z})$ *et* $n_1 \in \{1, \dots, n\}$*,* $C_1 \in \mathbb{R}^+$*. Nous notons toujours* $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1, \mathbf{z}, 1, f_1(\mathbf{z}), \dots, f_n(\mathbf{z}))$*.*

Supposons de plus qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$*, tel que pour tout* $Q \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0} Q(\mathcal{T}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) \geq \lambda \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0} Q(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \tag{2.120}$$

et qu'il existe une constante $K_0 \in \mathbb{R}^+$ *(dépendant uniquement de* $\mathcal{T}$ *et de* $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}$*) telle que pour tout entier positif*

$$N \leq \nu(n+1)! \rho_{n+1}^{n+1} \tag{2.121}$$

(où ν *vaut* $2^{n+2} \max\left(1, \frac{4r}{s}\right)^{n+1}$ *si* $s \neq 0$ *et 1 sinon) toute variété irréductible* $\mathcal{T}^N$*-stable* $W \subsetneq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ *(définie sur le corps* $\Bbbk$*) de dimension* $\dim W \leq n - n_1 + 1$ *satisfait nécessairement*

$$\mathrm{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}}(W) < K_0 \left(\mathrm{d}_{(0, \dim W)} W + \mathrm{d}_{(1, \dim W - 1)} W \right). \tag{2.122}$$

Alors, il existe une constante $K_1 > 0$ *telle que pour tout* $P \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ *satisfaisant pour tout* $C \geq C_1$

$$i_0(\mathcal{Z}_C(P)) \geq n_1 \tag{2.123}$$

satisfait aussi

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) \leq K_1 (\deg_{\underline{X}'} P + \deg_{\underline{X}} P + 1)(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n. \tag{2.124}$$

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème 2.16 à la transformation $\phi = \underline{\mathcal{T}}^*$. On a immédiatement les propriétés (2.1) (avec $\mu = t$, $\nu_0 = r$ et $\nu_1 = s$) et (2.4) (cette dernière est fournie par l'hypothèse (2.120)). Dans ce cas ν (introduit dans la définition 2.23) est égal à $2^{n+2} \max\left(1, \frac{4r}{s}\right)^{n+1}$ si $s \neq 0$ et 1 sinon. Posons $C_0 = C_{\text{rég}}$. Alors la condition (2.26) est assurée avec le lemme 1.31 et le corollaire 2.11.

Afin de vérifier (2.28) pour les idéaux équidimensionnels $\underline{\mathcal{T}}^*$-stables J satisfaisant $m(J) \leq \nu(n+1)\rho_{n+1}^{n+1}$ et (2.27), remarquons que la condition de $\underline{\mathcal{T}}^*$-stabilité entraîne

$$\mathcal{V}(J) \subset \overline{\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{V}(J))} \tag{2.125}$$

d'où par application de $\mathcal{T}$ aux deux côtés

$$\mathcal{T}(\mathcal{V}(J) \setminus \operatorname{irr} \mathcal{T}) \subset \mathcal{V}(J) \tag{2.126}$$

(rappelons que $\operatorname{irr} \mathcal{T}$ est introduite dans la définition 1.30). Comme nous avons posé $C_0 = C_{\text{rég}}$ (et vu (2.27) et le lemme 1.31) toute composante W de la variété $\mathcal{V}(J)$ satisfait $W \not\subset \operatorname{irr} \mathcal{T}$

$$\dim W = \dim \mathcal{T}(W \setminus \operatorname{irr} \mathcal{T}).$$

Rappelons que J est un idéal équidimensionnel et donc pour toutes ses composantes irréductibles on a $\dim W = \dim \mathcal{V}(J)$, on en déduit que $\overline{\mathcal{T}(W \setminus \operatorname{irr} \mathcal{T})}$ est une composante irréductible de $\mathcal{V}(J)$.

Ainsi $\mathcal{T}$ induit une application de l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{V}(J)$ dans lui même. Mais, le cardinal de l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{V}(J)$ est majoré par $m(J) \leq \nu(n+1)!\rho_{n+1}^{n+1}$ par hypothèse sur J. Il existe donc un sous-ensemble de cet ensemble qui est permuté par l'action de $\mathcal{T}$ et ce sous-ensemble contient au plus $\nu(n+1)!\rho_{n+1}^{n+1}$ éléments. Comme les orbites de $\mathcal{T}$ dans ce sous-ensemble ne peuvent avoir plus de $\nu(n+1)!\rho_{n+1}^{n+1}$ éléments, on en déduit qu'une puissance $\mathcal{T}^N$, $N \leq \nu(n+1)!\rho_{n+1}^{n+1}$, fixe une composante irréductible W de $\mathcal{V}(J)$.

Maintenant l'hypothèse (2.122) nous assure l'hypothèse (2.28), et ainsi toutes les conditions du théorème 2.16 sont vérifiées. En appliquant ce théorème nous obtenons la conclusion (2.124) (qui coïncide avec la conclusion (2.30) du théorème 2.16 si $K_1 = K\mu^{n-1}\max(\mu+\nu_0, \nu_1)$).■

Comme une conséquence immédiate du théorème 2.34 nous obtenons le théorème 0.1. En effet, l'hypothèse que $f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_n(\mathbf{z})$ satisfont le système (7) assure la condition (2.120), qui nous permet d'appliquer le théorème 2.34 en établissant le résultat.

Chapitre 3

Le cas des relations de Mahler généralisées

3.1 Généralités

Dans les paragraphes 3.1 et 3.2 nous considérons un corps commutatif $\Bbbk$ de caractéristique quelconque. Au paragraphe 3.3 nous nous placerons sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Soit $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ la transformation rationnelle définie par (2.118) :

$$\begin{aligned}(X_0' : X_1', X_0 : ... : X_n) \to \Big(& A_0'(X_0', X_1') : A_1'(X_0', X_1'), \\ & A_0(X_0', X_1', X_0, ..., X_n) : ... : A_n(X_0', X_1', X_0, ..., X_n)\Big),\end{aligned}$$

où $A_i' \in \Bbbk[X_0', X_1']$, $i = 0, 1$, sont des polynômes homogènes de degré r en $\underline{X}'$ et $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 0, ..., n$, sont des polynômes bi-homogènes de bi-degré (s, t) en $\underline{X}'$ et $\underline{X}$.

Dans ce chapitre nous déduisons du théorème 2.34 le lemme de multiplicité fonctionnel dans le cas où les polynômes définissant $\mathcal{T}$ sont linéaires en $\underline{X}$ (i.e. $t = 1$). Au paragraphe (3.3) nous déduisons à l'aide de ce lemme de multiplicitè certains résultats d'indépendence algébrique.

Rappelons la remarque 2.31 : à toute transformation $\mathcal{T}$ rationnelle définie par (2.118) et telle que A_0 et A_0' sont des polynômes non nuls on associe un système d'équations fonctionnelles (7) en posant $p(\mathbf{z}) = \frac{A_1'(1,\mathbf{z})}{A_0'(1,\mathbf{z})}$:

$$A_0(\tilde{\underline{\mathbf{f}}}(\mathbf{z})) f_i(p(\mathbf{z})) = A_i(\tilde{\underline{\mathbf{f}}}(\mathbf{z})), \quad i = 1, ..., n$$

(où $\tilde{\underline{\mathbf{f}}}$ désigne $(1, \mathbf{z}, 1, f_1(\mathbf{z}), ..., f_n(\mathbf{z}))$). Nous posons $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \text{ord}_{\mathbf{z}=0} p(\mathbf{z})$.
Introduisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1. Le système d'équations fonctionnelles associé à $\mathcal{T}$ admet une solution en séries entières algébriquement indépendantes, que nous notons $\underline{\mathbf{f}} = (1 : f_1(\mathbf{z}) : ... : f_n(\mathbf{z}))$.

Rappelons que par $\underline{\mathcal{T}}^*$ nous désignons l'application

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{T}}^* : \mathcal{A} &\to \mathcal{A}, \\ X_j' &\mapsto A_0'(X_0', X_1') \text{ pour } j = 0, 1, \\ X_i &\mapsto A_i(X_0', X_1', X_0, ..., X_n) \text{ pour } i = 0, ..., n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nous notons par $\pi_0(\mathbf{x})$ la projection d'un point $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ sur le premier facteur $\mathbb{P}^1$, et par $\pi_1(\mathbf{x})$ la projection de $\mathbf{x}$ sur le deuxième facteur $\mathbb{P}^n$.

Nous allons utiliser la notation $(\mathcal{T}^{-1}(\underline{\mathbf{h}}))_{(1:\mathbf{z})}$ avec $\underline{\mathbf{h}} \in \mathbb{P}^1_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}} \times \mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}}$ pour désigner l'ensemble des points

$$\underline{\mathbf{g}} = (1 : \mathbf{z}, 1 : \mathbf{g}_1 : ... : \mathbf{g}_n) \in \{(1 : \mathbf{z})\} \times \mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}} \text{ tels que } \mathcal{T}(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathbf{h}}.$$

En particulier, $\left(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})\right)_{(1:\mathbf{z})}$ désigne l'ensemble des points $(1 : \mathbf{z}, 1 : \mathbf{g}_1 : ... : \mathbf{g}_n)$ satisfaisant $\mathcal{T}(\underline{\mathbf{g}}) = \mathcal{T}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})$.

Lemme 3.2. *Toute transformation $\mathcal{T}$ définie par (2.118) et satisfaisant l'hypothèse 3.1 possède la propriété suivante : pour tout polynôme $P \in \mathcal{A}$ bihomogène on a*

$$\underline{\mathcal{T}}^* P(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z})) = A_0'(1, \mathbf{z})^{\deg_{\underline{X}'} P} A_0(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z}))^{\deg_{\underline{X}} P} P(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(p(\mathbf{z}))) \tag{3.2}$$

Démonstration. Par définition de $\underline{\mathcal{T}}^*$,

$$\underline{\mathcal{T}}^* P(\underline{X}', \underline{X}) = P(A_0'(\underline{X}'), A_1'(\underline{X}'), A_0(\underline{X}', \underline{X}), ..., A_n(\underline{X}', \underline{X})). \tag{3.3}$$

Comme P est bihomogène, on a

$$\begin{aligned} &P(A_0'(\underline{X}'), A_1'(\underline{X}'), A_0(\underline{X}', \underline{X}), ..., A_n(\underline{X}', \underline{X})) \\ &= A_0'(\underline{X}')^{\deg_{\underline{X}'} P} A_0(\underline{X}', \underline{X})^{\deg_{\underline{X}} P} \\ &\quad \times P\left(1, \frac{A_1'(\underline{X}')}{A_0'(\underline{X}')}, 1, \frac{A_1(\underline{X}', \underline{X})}{A_0(\underline{X}', \underline{X})}, ..., \frac{A_n(\underline{X}', \underline{X})}{A_0(\underline{X}', \underline{X})}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Collons (3.3) et (3.4), puis substituons $X_0' = 1$, $X_1' = \mathbf{z}$, $X_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{z})$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{T}}^* P(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) = &A_0'(1, \mathbf{z})^{\deg_{\underline{X}'} P} A_0(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z}))^{\deg_{\underline{X}} P} \\ &\times P\left(1, \frac{A_1'(1, \mathbf{z})}{A_0'(1, \mathbf{z})}, 1, \frac{A_1(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z}))}{A_0(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z}))}, ..., \frac{A_n(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z}))}{A_0(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z}))}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Maintenant il suffit d'utiliser les relations (7) pour déduire (3.2).■

Démonstration du théorème 0.1. Le lemme 3.2 assure la propriété (2.120), ainsi le théorème 0.1 est un corollaire direct du théorème (2.34).■

Lemme 3.3. *La transformation $\mathcal{T}$ définie par (2.118) et satisfaisant l'hypothèse 3.1 est une transformation dominante.*

Démonstration. *Ad absurdum.* Si $\mathcal{T}$ n'est pas dominante, alors il existe un polynôme bihomogène $P \in \Bbbk[X_0' : X_1'; X_0 : ... : X_n]$ non nul tel que

$$\underline{\mathcal{T}}^* P(\underline{X}', \underline{X}) = P\left(A_0'(\underline{X}'), A_1'(\underline{X}'), A_0(\underline{X}', \underline{X}), ..., A_n(\underline{X}', \underline{X})\right) = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

où $\mathbf{0} \in \Bbbk[X_0' : X_1', X_0 : ... : X_n]$ désigne le polynôme nul.

Substituons dans (3.6) $X_0' = 1$, $X_1' = \mathbf{z}$, $X_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{z})$, puis appliquons le lemme 3.2, nous obtenons

$$A_0'(1, \mathbf{z})^{\deg_{\underline{X}'} P} A_0(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(\mathbf{z}))^{\deg_{\underline{X}} P} P(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}(p(\mathbf{z}))) = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Comme $\mathbf{z}$, $\mathbf{f}_1$,...,$\mathbf{f}_n$ sont algébriquement indépendantes sur $\Bbbk$ (et A_0 est un polynôme bihomogène non nul à coefficients dans $\Bbbk$), $A_0(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}) \neq \mathbf{0}$, et $\mathbf{z}$ étant transcendant sur $\Bbbk$ on a évidemment $A_0'(1, \mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$. Ainsi

$$P(1, p(\mathbf{z}), 1, \mathbf{f}_1(p(\mathbf{z})), ..., \mathbf{f}_n(p(\mathbf{z}))) = \mathbf{0}$$

c'est que contredit l'indépendance algébrique des $\mathbf{f}_1$,...,$\mathbf{f}_n$ sur $\Bbbk(\mathbf{z})$.■

Remarque 3.4. Dans la démonstration du lemme 3.3 nous avons utilisé l'hypothèse qu'il existe une solution du système (7) dont toutes les composantes sont algébriquement indépendantes sur $\Bbbk(\mathbf{z})$.

Rappel. La notion d'idéal $\underline{\mathcal{T}}^*$-stable est donnée dans la définition 2.6 et la notion de la variété $\mathcal{T}$-stable est donnée dans la définition 2.33.

Remarque 3.5. Le fait qu'une variété W est $\mathcal{T}$-stable implique que l'idéal $\mathcal{I}(W)$ est $\underline{\mathcal{T}}^*$-stable, mais la réciproque n'est pas vraie. La condition $\underline{\mathcal{T}}^*(\mathcal{I}(W)) \subset \mathcal{I}(W)$ signifie géométriquement que W est un sous-schéma de $\mathcal{T}^{-1}(W)$. Mais, si l'on sait que la variété W est irréductible et $\dim \mathcal{T}(W) = \dim W$, alors on a la propriété :

$$\text{la variété } W \text{ est } \mathcal{T}\text{-stable} \Leftrightarrow \text{l'idéal } \mathcal{I}(W) \text{ est } \underline{\mathcal{T}}^*\text{-stable.} \quad (3.8)$$

Remarque 3.6. Si une variété W est contenue dans $\operatorname{irr}\mathcal{T}$, alors par notre convention $\mathcal{T}(W) = \mathcal{T}(W \setminus \operatorname{irr}\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset \subset W$, donc formellement toute variété qui se trouve à l'intérieure de $\operatorname{irr}\mathcal{T}$ est $\mathcal{T}$-stable. Remarquons que pour toute telle variété

$$\operatorname{ord}_{\mathbf{f}} W \leq \operatorname{ord}_{\mathbf{f}}\left(\operatorname{irr}\mathcal{T}\right),$$

donc la quantité $\operatorname{ord}_{\mathbf{f}} W$ est majorée par une constante ne dépendant que de $\mathbf{f}$ et de $\mathcal{T}$.

3.2 Lemme de Nishioka

Soit $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ une transformation définie par (2.118) avec les polynômes A_i linéaires en $\underline{X}$ (et ainsi $t = 1$) :

$$A_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}(\underline{X}')X_j, \qquad i = 0, ..., n,$$

où $a_{ij}(\underline{X}')$ désigne des polynômes de $\mathbb{k}[X_0', X_1']$ homogènes du degré s. Supposons que $\mathcal{T}$ satisfait l'hypothèse 3.1 (et donc par le lemme 3.3 la transformation $\mathcal{T}$ est dominante). Dans ce cas $\operatorname{irr}\mathcal{T} = \emptyset$.

D'ici et jusqu'à la fin de ce paragraphe nous notons W une variété définie sur $\mathbb{k}$ et $\mathcal{T}$-stable.

Soit $\gamma(\mathbf{z}) \in \overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}$. Posons

$$W_{\gamma(\mathbf{z})} \stackrel{\text{def}}{=} W \cap \mathcal{V}(X_0'\gamma(\mathbf{z}) - X_1') \tag{3.9}$$

et notons $\mathcal{T}_{\gamma(\mathbf{z})}$ la transformation de $\mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}}$ dans $\mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}}$ définie par

$$(X_0 : ... : X_n) \to \Big(A_0(1, \gamma(\mathbf{z}), X_0, ..., X_n) : ... : A_n(1, \gamma(\mathbf{z}), X_0, ..., X_n)\Big).$$

Lemme 3.7. *Soit $\gamma(\mathbf{z}) \in \overline{\mathbb{k}((\mathbf{z}))}$ et $\tilde{\phi} \in W_{\gamma(\mathbf{z})}$. Supposons que*

$$p(\gamma(\mathbf{z})) = p(\mathbf{z}). \tag{3.10}$$

Alors il existe $\tilde{\phi}' \in W_{\mathbf{z}}$ tel que $\mathcal{T}(\tilde{\phi}') = \mathcal{T}(\tilde{\phi})$.

Démonstration. Les applications $\mathcal{T}_{\gamma(\mathbf{z})} : \pi_1(W_{\gamma(\mathbf{z})}) \to \pi_1(W_{p(\mathbf{z})})$ et $\mathcal{T}_{\mathbf{z}} : \pi_1(W_{\mathbf{z}}) \to \pi_1(W_{p(\mathbf{z})})$ sont linéaires et non-dégénérées (car $\mathbf{z}$ et $\gamma(\mathbf{z})$ sont tous les deux transcendants sur $\mathbb{k}$, tandis que $\mathcal{T}$ est définie sur $\mathbb{k}$ et dominante, cf. le lemme 3.3). Ainsi ces deux applications induisent des isomorphismes entre $\pi_1(W_{\gamma(\mathbf{z})})$, $\pi_1(W_{p(\mathbf{z})})$ et $\pi_1(W_{\mathbf{z}})$. Maintenant il est facile de vérifier que si l'on pose $\phi' := \mathcal{T}_{\mathbf{z}}^{-1} \circ \mathcal{T}_{\gamma(\mathbf{z})}(\pi_1(\tilde{\phi}))$, le point $\tilde{\phi}' := (1 : \mathbf{z}, \phi')$ appartient à $W_{\mathbf{z}}$ et l'on a $\mathcal{T}(\tilde{\phi}') = \mathcal{T}(\tilde{\phi})$.■

Lemme 3.8. *Soit $\tilde{\beta} = (1 : \mathbf{z}, \beta(\mathbf{z})) \in W$. Alors, $W \cap \mathcal{T}^{-1}(1 : p(\mathbf{z}), \beta(p(\mathbf{z}))) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Comme W est définie sur $\mathbb{k}$ et $\tilde{\beta}(\mathbf{z}) \in W$, on a $\tilde{\beta}(p(\mathbf{z})) \in W$. Comme W est $\mathcal{T}$-stable, $W \cap \mathcal{T}^{-1}(\tilde{\beta}(p(\mathbf{z}))) \neq \emptyset$.■

Corollaire 3.9. *Soit $\tilde{\beta} = (1 : \mathbf{z}, \beta(\mathbf{z})) \in W_{\mathbf{z}}$. Alors, $W_{\mathbf{z}} \cap \mathcal{T}^{-1}(1 : p(\mathbf{z}), \beta(p(\mathbf{z}))) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Le point $\tilde{\beta}$ donné, nous trouvons avec le lemme 3.8 un point $\tilde{\alpha}$ dans $W \cap \mathcal{T}^{-1}(\tilde{\beta}(p(\mathbf{z})))$. Comme $\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta}(p(\mathbf{z})) \in W_{p(\mathbf{z})}$, on a nécessairement $\tilde{\alpha} = (1 : \gamma(\mathbf{z}), \alpha(\mathbf{z}))$ avec $\gamma(\mathbf{z})$ satisfaisant $p(\gamma(\mathbf{z})) = p(\mathbf{z})$ (et ainsi par définition $\tilde{\alpha} \in W_{\gamma(\mathbf{z})}$). Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.7, qui nous fournit un point $\tilde{\alpha}' \in W_{\mathbf{z}}$ satisfaisant $\mathcal{T}(\tilde{\alpha}') = \mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta}(p(\mathbf{z}))$, ce qui montre le corollaire.■

Nous rappelons que la notation $\mathrm{Ord}_{z=0}(\cdot,\cdot)$ a été introduite à la page 38.

Lemme 3.10.

$$\sup_{\alpha\in\pi_1(W_{\mathbf{z}})} \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathcal{T}_{\mathbf{z}}(\mathbf{f}), \mathcal{T}_{\mathbf{z}}(\alpha)) \geq \lambda \sup_{\beta\in\pi_1(W_{\mathbf{z}})} \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{f}, \beta). \tag{3.11}$$

Démonstration. Remarquons d'abord

$$\lambda \sup_{\beta\in\pi_1(W_{\mathbf{z}})} \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{f}, \beta) = \sup_{\beta\in\pi_1(W_{\mathbf{z}})} \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{f}(p(\mathbf{z})), \beta(p(\mathbf{z}))). \tag{3.12}$$

Pour $\underline{\mathbf{f}}$ on a la propriété $\underline{\mathbf{f}}(p(\mathbf{z})) = \mathcal{T}_{\mathbf{z}}(\underline{\mathbf{f}})$. Ensuite, pour tout $\beta \in \pi_1(W_{\mathbf{z}})$ on a un point $\tilde{\beta} \in W_{\mathbf{z}}$ satisfaisant $\pi_1(\tilde{\beta}) = \beta$ et puis le corollaire 3.9 nous donne un point $\tilde{\alpha}' \in W_{\mathbf{z}}$ satisfaisant $\mathcal{T}(\tilde{\alpha}') = \tilde{\beta}(p(\mathbf{z}))$, et ainsi

$$\mathcal{T}_{\mathbf{z}}(\pi_1(\tilde{\alpha}')) = \beta(p(\mathbf{z})). \tag{3.13}$$

Donc, pour tout point $\beta \in \pi_1(W_{\mathbf{z}})$ on détermine un point $\alpha = \pi_1(\tilde{\alpha}') \in \pi_1(W_{\mathbf{z}})$ satisfaisant (3.13).

Cette construction, jointe à (3.12), nous donne immédiatement l'estimation (3.11).■

Théorème 3.11. *Soit $\Bbbk$ un corps commutatif de caractéristique quelconque et $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk} \to \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ une transformation définie par (2.118) avec les polynômes A_i linéaires en $\underline{X}$. Soit $(1, f_1(\mathbf{z}), ..., f_n(\mathbf{z}))$ une solution en séries entières algébriquement indépendents du système d'équations fonctionnelles associé à $\mathcal{T}$ satisfaisant l'hypothèse 3.1. Supposons que*

$$\lambda := \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\, p(\mathbf{z}) \geq 2. \tag{3.14}$$

Alors, il existe une constante K_1 telle que pour tout polynôme $P \in \mathcal{A}$ non nul, on a

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(P(\tilde{\underline{\mathbf{f}}})) \leq K_1(\deg_{\underline{X'}} P + \deg_{\underline{X}} P + 1)(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n.$$

Démonstration. Si $\mathcal{T}$ est définie par (2.118) avec des polynômes A_i linéaires en $\underline{X}$, la transformation $\mathcal{T}^N$ l'est aussi, et si N est majoré par une constante ne dépendant que de $\mathcal{T}$, les degrés correspondants s, λ etc. de la transformation $\mathcal{T}^N$ sont aussi majorés par des constantes ne dépendant que de $\mathcal{T}$. Ainsi en étudiant des idéaux stables de la transformation $\mathcal{T}^N$ nous nous restreignons à l'étude des idéaux $\mathcal{T}$-stables.

Remarquons d'abord que l'application $\mathcal{T}_{\mathbf{z}}$ est une application linéaire non dégénérée définie sur $\Bbbk(\mathbf{z})$. Notons $C_3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \det \mathcal{T}_{\mathbf{z}}^{-1}$.

Soit $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ une variété définie sur $\Bbbk$ et $\mathcal{T}$-stable. Vérifions l'inégalité

$$\sup_{\alpha \in \pi_1(W_{\mathbf{z}})} \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{f}, \alpha) \leq \frac{C_3}{\lambda - 1}. \tag{3.15}$$

En effet, par le lemme 3.10 nous avons l'estimation (3.11). Puis, comme $\mathcal{T}_{\mathbf{z}}$ est une application linéaire non dégénérée, on a $\mathrm{Ord}_{z=0}(\mathcal{T}_{\mathbf{z}}(\mathbf{f}), \mathcal{T}_{\mathbf{z}}(\alpha)) \leq C_3 + \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{f}, \alpha)$ et donc

$$\sup_{\alpha \in \pi_1(W_{\mathbf{z}})} \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathcal{T}_{\mathbf{z}}(\mathbf{f}), \mathcal{T}_{\mathbf{z}}(\alpha)) \leq C_3 + \sup_{\alpha \in \pi_1(W_{\mathbf{z}})} \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{f}, \alpha). \tag{3.16}$$

En comparant (3.11) et (3.16) nous trouvons (3.15).

L'inégalité (3.15) implique

$$\mathrm{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} W = \sup_{\tilde{\alpha} \in W} \mathrm{Ord}_{z=0}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\alpha}) \leq \max\left(2, \frac{C_3}{\lambda - 1}\right). \tag{3.17}$$

En effet, supposons que pour un $\tilde{\alpha} \in W$ on ait

$$\mathrm{Ord}_{z=0}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\alpha}) > \max\left(2, \frac{C_3}{\lambda - 1}\right). \tag{3.18}$$

Alors, il existe un système de coordonnées projectives $\underline{\tilde{\alpha}} = (1, \gamma(\mathbf{z}), \underline{\alpha}(\mathbf{z}))$ avec $\gamma(\mathbf{z}) \in \overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}$ et $\alpha(\mathbf{z}) \in \pi_1(W)$ tel que $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{z} - \gamma(\mathbf{z})) > \max(2, \frac{C_3}{\lambda-1})$ et

$$\mathrm{Ord}_{z=0}(\alpha(\mathbf{z}), \mathbf{f}) > \max(2, \frac{C_3}{\lambda - 1}). \tag{3.19}$$

Comme $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{z} - \gamma(\mathbf{z})) > \max(2, \frac{C_3}{\lambda-1})$, il existe une série $v(\mathbf{z}) \in \Bbbk((\mathbf{z}))$ satisfaisant $\gamma(v(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$ et

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{z} - v(\mathbf{z})) > \max\left(2, \frac{C_3}{\lambda - 1}\right). \tag{3.20}$$

En substituant $v(\mathbf{z})$ au lieu de $\mathbf{z}$ dans $\underline{\tilde{\alpha}}(\mathbf{z})$ nous trouvons $\underline{\tilde{\alpha}}(v(\mathbf{z})) = (1, \mathbf{z}, \alpha(v(\mathbf{z})))$. Comme W est définie sur $\Bbbk$, $\underline{\tilde{\alpha}}(v(\mathbf{z})) \in W$. De plus, comme $v(\mathbf{z})$ coincide avec la série $\mathbf{z}$ au moins jusqu'à l'ordre $\max(2, \frac{C_3}{\lambda-1})$, l'inégalité (3.19) implique

$$\mathrm{Ord}_{z=0}(\alpha(v(\mathbf{z})), \mathbf{f}) > \max\left(2, \frac{C_3}{\lambda - 1}\right).$$

Comme $\underline{\tilde{\alpha}} \in W_{\mathbf{z}}$, on déduit donc la minoration

$$\sup_{\alpha \in \pi_1(W_{\mathbf{z}})} \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{f}, \alpha) > \max\left(2, \frac{C_3}{\lambda - 1}\right),$$

qui contredit (3.15). Cette contradiction montre que l'hypothèse (3.18) est intenable et donc assure (3.17).

Maintenant on fait la remarque que la transformation $\mathcal{T}^N$, $N \in \mathbb{N}$, est aussi définie par des formules du type (2.118), donc pour une variété $\mathcal{T}^N$-stable on a l'estimation (3.17) (avec C_3 remplacée par C_3^N). Cette dernière inégalité montre que l'hypothèse (2.122) du théorème 2.34 est satisfaite (et même sous une forme plus forte). Il suffit d'appliquer le théorème 2.34 qui nous donne le résultat souhaité.■

Remarque 3.12. Le théorème 3.11 était démontré dans le cas particulier $p(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^d$ ($d \geq 2$) par Nishioka [33]. Töpfer a considéré des systèmes plus généraux mais l'estimation de $\mathrm{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} P$ qu'il obtient en lieu et place de celle de notre théorème 3.11 a un exposant strictement plus grand que n (et ainsi n'est pas optimal) [50]. Ces théorèmes était démontrés en caractéristique 0, contrairement au théorème 3.11.

Dans la suite nous allons appliquer le théorème 3.11 pour améliorer plusieurs résultats d'indépendance algébrique, notamment ceux de Th.Töpfer [49]. Les méthodes de transcendance étant plus délicates à manier en caractéristique finie nous nous sommes contentés de résultat en caractéristique 0 laissant l'étude de caractéristique finie pour une phase ultérieure.

3.3 Application à l'indépendance algébrique

Dans ce paragraphe nous utilisons le lemme de mutiplicité établi dans le paragraphe 3.2 pour estimer la mesure d'indépendance algébrique dans le cas correspondant.

Soit $p(\mathbf{z}) = p_1(\mathbf{z})/p_2(\mathbf{z})$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Notons $d = \deg p$, $\delta = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} p$. Soient $f_1(\mathbf{z}),...,f_n(\mathbf{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}[[\mathbf{z}]]$ des fonctions analytiques à coefficients algébriques, algébriquement indépendantes et satisfaisant un système d'équations fonctionnelles de la forme

$$a(\mathbf{z})\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = A(\mathbf{z})\underline{\mathbf{f}}(p(\mathbf{z})) + B(\mathbf{z}) \tag{3.21}$$

où $\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = (f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_n(\mathbf{z}))$, $a(\mathbf{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{z}]$ et A (resp. B) est une matrice $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{z}]$.

Pour des solutions d'un système de la forme (3.21) Th.Töpfer [49] a démontré que lorsque $p \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{z}]$ est un polynôme et ω un point fixe de p, les fonctions algébriquement indépendantes $f_1(\mathbf{z}),...,f_n(\mathbf{z})$ sont analytiques (à coefficients algébriques) dans un voisinage U de ω et que pour α un nombre algébrique tel que

$$\mathcal{T}(p^{[N]}(\alpha)) \to \omega$$

avec $N \to \infty$ (et $\mathcal{T}(p^{[N]}(\alpha))$ n'est pas zéro du dénominateur commun de A pour tout $N \in \mathbb{N}$), on a

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\underline{\mathbf{f}}(\alpha)) \geq m_0,$$

où m_0 désigne le plus grand entier satisfaisant $m_0 < (n+1)\frac{\log \delta}{\log d}$ (cf.[49], théorème 3). Dans le même article Th.Töpfer a aussi donné une mesure d'indépendance algébrique dans le cas $d = \delta$ (cf.[49], théorème 1).

Nous utilisons la méthode générale élaboré dans [42] et notre lemme de mutiplicité démontré dans le paragraphe 3.2 afin d'améliorer ces résultats.

Remarque 3.13. Le point stable ω de p satisfait (par définition) l'équation $p(\omega) = \omega$. Si p est à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, le point ω est algébrique et ainsi le polynôme $p_1(\mathbf{z}) := p(\mathbf{z} + \omega) - \omega$ est aussi à coefficient algébriques, et le point 0 est son point stable. Ainsi dans les résultats cités ci-dessus les considérations pour un point p-stable ω arbitraire peuvent être réduit au cas $\omega = 0$ (voir le début de la section 4 dans [49]).

Remarquons, que l'indépendance algébrique de $f_1(\mathbf{z})$,...,$f_n(\mathbf{z})$ implique $\det A \neq 0$ et donc nous pouvons réécrire (3.21) comme

$$\underline{\mathbf{f}}(p(\mathbf{z})) = a(\mathbf{z})^{-1}A(\mathbf{z})^{-1}\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) - a(\mathbf{z})^{-1}A(\mathbf{z})^{-1}B(\mathbf{z}). \tag{3.22}$$

Ainsi nous sommes bien dans la situation considérée dans le paragraphe 3.2 et donc il existe une constante K_1 telle que pour tout polynôme $P \in \mathcal{A}$ non nul, on ait

$$\operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0}(P(\tilde{\underline{\mathbf{f}}})) \leq K_1(\deg_{\underline{X}'} P + \deg_{\underline{X}} P + 1)(\deg_{\underline{X}} P + 1)^n \tag{3.23}$$

(cf. le théorème 3.11).

Töpfer a démontré le résultat suivant :

Lemme 3.14. (voir le lemme 11 de [49]) *Soient* $T, D \in \mathbb{N}$ *et* $y \in \mathbb{C}$. *Soit* K *un corps de nombres. Alors il existe un polynôme* $R_{T,D} \in K[\mathbf{z}, \underline{X}]$ *satisfaisant*

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbf{z}} R_{T,D} &\leq C_1 d^T D && (3.24)\\ \deg_{\underline{X}} R_{T,D} &\leq D && (3.25)\\ h(R_{T,D}) &\leq \exp\Big(C_2 D(d^T + D^n)\Big). && (3.26) \end{aligned}$$

Si de plus on a

$$\delta^T \geq C_3 D^{n+1}, \tag{3.27}$$

alors

$$\exp(-C_5 D^{n+1}\delta^T) \leq |R_{T,D}(y, \underline{\mathbf{f}}(y))| \leq \exp(-C_6 D^{n+1}\delta^T). \tag{3.28}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des lemmes 8 et 9 de [49] et du théorème 3.11. On définit les polynômes $R_{T,D}$ comme il est fait dans [49] à l'alinéa suivant le lemme 9 (*cf.* le bas de la page 174).■

Dans la suite nous aurons besoin de quelques définitions introduites dans [42].

Ici nous notons pour tout $r \in \mathbb{R}^+$

$$B(0,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}.$$

Soient $0 < r' \leq r < R$ et $S \subset \mathbb{N} \times B(0,r)$ un ensemble tel que pour tout $y \in B(0,r)$ le sous-ensemble $S \cap (\mathbb{N} \times \{y\})$ soit vide ou de la forme $\{0,\dots,m(y)-1\} \times \{y\}$. On appelera *ensemble pondéré* un tel ensemble S et *support* de S, noté $\mathrm{Supp}(S)$, son image par la projection π sur le second facteur. Si S est un ensemble pondéré de cardinal N on note $E_{r,r'}(\emptyset) = 1$ et sinon

$$E_{r,r'}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{r'}{r}\right)^N \cdot \prod_{z \in S} \frac{1 + (|\pi(z)|/r')}{1 + (|\pi(z)|r'/r^2)} \in]0,1]. \tag{3.29}$$

Exemple 3.1. Si un ensemble pondéré contient un seul point $(0,x)$, et si nous posons $r' = |x|$, $r \geq r'$, alors

$$E_{r,r'}(S) = \frac{|x|}{r} \cdot \frac{1 + (|x|/|x|)}{1 + (|x|^2/r^2)} = \frac{2r|x|}{r^2 + |x|^2}.$$

Dans la suite nous utiliserons aussi la quantité $G_{r,r'}$ ("la gravitation"), cf. [42]. Pour nous le seul cas d'importance sera celui où S est réduit à un point x. Dans ce cas $G_{r,r'}(S) = 1$ (cf. [42], p.4-5). Pour la définition générale nous renvoyons le lecteur au §2 de [42] (bas de la page 4 et haut de la page 5).

Pour tout $t \in \mathbb{N}$ et toute série formelle (et également pour toute fonction analytique) $g \in \mathbb{C}((\mathbf{z}))$ nous notons (suivant [42]) $D_t(g)$ le t-ème coefficient de g. Pour tout $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}^n$ et $t \in \mathbb{N}$ posons

$$\underline{D}_t f^{\mathcal{D}}(0) = \left(D_{t'}(f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_m})(0) \mid \alpha \in \mathcal{D}, t' = 0,\dots,t\right),$$

c'est un vecteur de $\overline{\mathbb{Q}}^{(t+1)\mathrm{card}\mathcal{D}}$. Si ψ est une fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{card}\mathcal{D} \geq 2\psi(0)$, on notera encore $t_{\mathcal{D}} = t_{\mathcal{D},\psi}$ le plus grand entier tel que $2t_{\mathcal{D}}\psi(t_{\mathcal{D}} - 1) \leq \mathrm{card}\mathcal{D}$.

Nous utiliserons la notation

$$|\mathcal{D}| = \max_{\alpha \in \mathcal{D}} \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Définition 3.15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A un ensemble infini de parties de $\mathbb{N}^n$,

$$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, \quad \phi : A \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq \mathrm{e}}$$

telles que pour tout $\mathcal{D} \in A$ les fonctions $\psi(t)$ et $\phi_{\mathcal{D}}(t)$ soient croissantes en t, la fonction $\frac{\log \phi_{\mathcal{D}}(t)}{t}$ soit décroissante en t pour $t \geq t_{\mathcal{D}}$ et

$\liminf_{|\mathcal{D}|\to\infty} \frac{\log \phi_{\mathcal{D}}(t_{\mathcal{D}})}{t_{\mathcal{D}}} = 0$. On suppose de plus $\phi_{\mathcal{D}}(t) \geq 4\sqrt{2}(t+1)\psi(t)$ pour $t \geq t_{\mathcal{D}}$.

On appelera *système de K-fonctions de type* (ψ, ϕ) une famille $(f_1, \dots f_m)$ de fonctions analytiques dans $B(0,1)$ telles que pour tout $t \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{D} \in A$ on ait

$$\underline{D}_t \underline{f}(0) \subset \overline{\mathbb{Q}}, \quad \left[\mathbb{Q}(\underline{D}_t \underline{f}(0)) : \mathbb{Q}\right] \leq \psi(t), \quad h\left(\underline{D}_t \underline{f}^{\mathcal{D}}(0)\right) \leq \phi_{\mathcal{D}}(t).$$

Définition 3.16. Soit $c \geq 1$ un réel, nous dirons qu'un sous-ensemble $\mathcal{D} \in A$ est *c-admissible* pour le système de K-fonctions $f_1, \dots, f_m$ si pour tout $Q \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_m]$ non-nul, supporté par $\mathcal{D}$ (c-à-d. de la forme $\sum_{\alpha \in \mathcal{D}} q_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_m^{\alpha_m}$), de longueur $\leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{card}\mathcal{D} \cdot \phi_{\mathcal{D}}(t_{\mathcal{D}})$, on a

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} Q(f_1, \dots, f_m) \leq c \cdot \mathrm{card}\mathcal{D}.$$

Remarque 3.17. L'ensemble

$$\mathcal{D} = \{\underline{h} \in \mathbb{N}^m \mid h_i < D\} \tag{3.30}$$

est c-admissible pour le système de K-fonctions $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ dès que $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ satisfait le lemme de multiplicité (avec l'exposant optimal, i.e. m, et la constante multiplicative égale à c).

Proposition 3.18. (Proposition 7 de [42]). *Soient $c' \geq 1$ et $f_1, ..., f_m$ un système de K-fonctions de type (ψ, ϕ), alors :*

1. *Pour tout $\mathcal{D} \in A$ il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ non nul, supporté par $\mathcal{D}$, de longueur $\leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{card}\mathcal{D} \cdot \phi_{\mathcal{D}}(t_{\mathcal{D}})$ tel que $T_0 := \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} F(\mathbf{z}) \geq t_{\mathcal{D}}$ où $F = P(f_1, ..., f_m)$;*
2. *si $\frac{\log \phi_{\mathcal{D}}(t_{\mathcal{D}})}{t_{\mathcal{D}}} \leq \frac{1}{24}$, pour tous réels r', r'' tels que $0 < r'' \leq r' < r^4$ où*

$$r := 1 - \frac{12 \log \phi_{\mathcal{D}}(T_0)}{T_0},$$

et pour tout ensemble pondéré S de support dans la couronne $\overline{B(0, r')} \setminus B(0, r'')$, de cardinal $N \leq T_0/8$, satisfaisant

$$\frac{-\log E_{r,r'}(S)}{\log \phi_{\mathcal{D}}(T_0)} \geq 19 \text{ et } \frac{\log G_{r,r'}(S)}{-T_0 \log (r''/4)} \leq c' \tag{3.31}$$

il existe un point $(t, y) \in S$ tel que

$$\left(\frac{r''}{4}\right)^{(c'+4)T_0} \leq |D_t F(y)| \leq \left(\frac{r'}{(1-\sqrt{r'})^2}\right)^{T_0/16}.$$

De plus, si $\mathcal{D}$ est c-admissible pour $f_1, \dots, f_m$, on a $T_0 \leq c \cdot \mathrm{card}\mathcal{D}$.

Démonstration du théorème 0.5. Le théorème 3.11 nous fournit le lemme de multiplicité pour les fonctions $\mathbf{z}, f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_n(\mathbf{z})$ et donc il existe un $C > 0$ tel que l'ensemble $\mathcal{D}$ donné par (3.30) (avec $m = n+1$) est C-admissible pour le système de K-fonctions $\mathbf{z}, f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_n(\mathbf{z})$. Le lemme 12 de [49] montre que les nombres $\underline{D_t}\underline{\mathbf{f}}(0)$ appartiennent à un corps de nombres fixé et nous en fournit une majoration de la hauteur :

$$h(\underline{D_t}\underline{f}^{\mathcal{D}}(0)) \leq (t+2)^{c_2|\mathcal{D}|}.$$

Dans la notation de la référence on a

$$\underline{D_t}\underline{\mathbf{f}}(0) = (f_{1,t}, \ldots, f_{n,t})$$

et

$$\underline{D_t}\underline{\mathbf{f}}^{\mathcal{D}}(0) = \left(f_t^{(\underline{j})} \mid \underline{j} \in \mathcal{D}\right),$$

et la hauteur est le produit du dénominateur et de la maison de ces vecteurs. En particulier, ces majorations entraînent que les séries $f_i(\mathbf{z})$ convergent pour $|\mathbf{z}| < 1$.

Ceci montre que pour $\psi(t) = c_1$, $\phi_{\mathcal{D}}(t) = (t+2)^{c_2|\mathcal{D}|}$ le système de fonctions $\mathbf{z}, f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_n(\mathbf{z})$ est un système de K-fonctions de type (ψ, ϕ) au sens de [42].

On applique la proposition 3.18 avec $m = n+1$, l'ensemble $\mathcal{D}$ défini comme dans (3.30), $r' = r'' = |p^{[T]}(y)|$ et $S = \{(0, p^{[T]}(y))\}$ où

$$T \geq \left[\frac{\log D + \log\log D + \log(19(n+1)c_2) - \log|\log|c_3''y||}{\log\delta}\right], \tag{3.32}$$

on a $E_{r,r'}(S) \leq 3|p^{[T]}(y)|$ (cf. l'exemple 3.1 car r est proche à 1 dans notre situation) et $G_{r,r'}(S) = 1$. Notons que pour T suffisamment grand on a

$$|c_3'y|^{\delta^T} \leq |p^{[T]}(y)| \leq |c_3''y|^{\delta^T},$$

car $|p^{[T]}(y)| \to 0$ (voir le lemme 2 de [49]).

On note F la fonction fournie par la proposition 3.18. Soit $q = \det A$, on vérifie

$$\left(\prod_{i=0}^{T-1} q(p^{[i]}(y))\right)^{nD} \cdot F\left(p^{[T]}(y)\right) = P_{D,T}(y, f_1(y), \ldots, f_n(y)) \tag{3.33}$$

où $P_{D,T} \in \mathbb{Z}[\mathbf{z}, X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme de degré $\leq c_4 D(d^T + \cdots + 1) \leq c_5 D d^T$ en $\mathbf{z}$, de degré $< D$ en $\underline{X}$ et de longueur inférieure à $\exp(c_6 D d^T)$. La majoration du degré en $\underline{X}$ est évidente, vérifions les majorations du degré en $\mathbf{z}$ et de la longueur de $P_{D,T}$. Montrons d'abord par récurrence

$$\deg_{\mathbf{z}} P_{D,N} \leq c_4 D(d^N + \cdots + 1), \tag{3.34}$$

pour $N = 0, \dots, T$. Pour $N = 0$ on a $P_{D,0}(y, \underline{f}(y)) = F(y)$ et donc (3.34) est vraie (vu la définition de F) pour toute $c_4 \geq 1$. Pour $N \geq 1$ nous avons

$$\begin{aligned} P_{D,N}(y, \underline{f}(y)) &= q(y)^{nD} \left(\prod_{i=1}^{N-1} q(p^{[i]}(y))^{nD} F(p^{[N]}(y)) \right) \\ &= q(y)^{nD} P_{D,N-1}(p(y), \underline{f}(p(y))) \\ &= q(y)^{nD} P_{D,N-1} \left(p(y), A^{-1}(y)\underline{f}(y) + A^{-1}B(y) \right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ainsi en admettant l'estimation (3.34) pour $N-1$ (et en utilisant la majoration évidente $\deg_{\underline{X}} P_{D,N} \leq D$) nous obtenons (en notant $A_0(y) = q(y)A^{-1}(y)$ et $B_0(y) = q(y)A^{-1}B(y)$) avec $c_4 \geq \max(\deg_{\mathbf{z}} A_0, \deg_{\mathbf{z}} B_0) + n\deg(q)$

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbf{z}} P_{D,N} &\leq nD \deg q + c_4 dD \left(d^{N-1} + \dots + 1 \right) + D \max(\deg_{\mathbf{z}} A_0, \deg_{\mathbf{z}} B_0) \\ &\leq c_4 D \left(d^N + \dots + 1 \right). \end{aligned}$$

Donc pour $c_4 = n \cdot \deg q + \max(\deg_{\mathbf{z}} A_0, \deg_{\mathbf{z}} B_0)$ l'estimation (3.34) est démontrée par récurrence. On en déduit immédiatement

$$\deg_{\mathbf{z}} P_{D,N} \leq c_4 D \frac{d^{N+1} - 1}{d - 1} \tag{3.36}$$

pour $N = 0, \dots, T$, et donc

$$\deg_{\mathbf{z}} P_{D,T} \leq 2c_4 D d^T. \tag{3.37}$$

Concernant la longueur $L(P_{D,N})$, nous déduisons de (3.35) l'estimation

$$\begin{aligned} L(P_{D,N}) &\leq L(P_{D,N-1}) \cdot L(q)^{nD} \cdot L(p)^{\deg_{\mathbf{z}} P_{D,N-1}} \\ &\quad \times \left(L(A_0(y)) + L(B_0(y)) \right)^D \\ &\leq L(P_{D,N-1}) \exp\left(c_6'(D + \deg_{\mathbf{z}} P_{D,N-1}) \right), \end{aligned}$$

puis avec (3.37)

$$L(P_{D,N}) \leq L(P_{D,N-1}) \exp\left(c_6'' D d^{N-1} \right).$$

En appliquant la récurrence nous déduisons

$$L(P_{D,T}) \leq \exp\left(c_6'' D(d^{T-1} + \dots + 1) \right) \leq \exp\left(c_6 D d^T \right). \tag{3.38}$$

Ceci achève la vérification de la majoration de la longueur et des degrés de P_T en $\mathbf{z}$ et en $\underline{X}$.

Remarquons que les majorations du $\deg_{\mathbf{z}} P_{D,T}$ et de la longueur de $P_{D,T}$ impliquent que pour un $y \in \overline{\mathbb{Q}}$ fixé à l'avance la longueur de $P_{D,T}$ est bornée par $c_6'''Dd^T$ (où la constante c_6''' dépend de y mais est indépendante de D et T). Dans la suite pour un y fixé nous utiliserons la notation c_6 au lieu de c_6'''.

Soit $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ une variété de dimension $k < n+1-\frac{\log d}{\log \delta}$, posons

$$\theta(W) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left(h(W), d(W)^{\frac{n-k+1+\varepsilon}{n-k+1-\frac{\log d}{\log \delta}}}\right),$$

$$D' := c\left(\theta(W)^{1-\frac{\log \delta}{\log d}} d(W)^{\frac{\log \delta}{\log d}}\right)^{1/(n-k)}, \tag{3.39}$$

$$T := \frac{1}{\log d}\log\left(\frac{\theta(W)}{d(W)}\right) + 2\cdot\frac{\log c + \log\log c}{\log \delta}, \tag{3.40}$$

où c désigne une constante suffisamment grande. Vérifions (3.32) pour tout couple de paramètres $D \leq D'$ et T. Tout d'abord, remarquons qu'il suffit de vérifier cette inégalité seulement pour $D = D'$. Ensuite, vu la définition de $\theta(W)$, on a

$$(n-k+1+\varepsilon)\log d(W) \leq (n-k+1-\frac{\log d}{\log \delta})\log\theta(W).$$

Pour $\varepsilon_1 = \frac{n-k+1-\frac{\log d}{\log \delta}}{n-k+1+\varepsilon}\varepsilon$ on peut réécrire cette inégalité comme

$$(n-k+1)\log d(W) \leq (n-k+1-\frac{\log d}{\log \delta} - \varepsilon_1)\log\theta(W), \tag{3.41}$$

et vu l'hypothèse $k < n+1-\frac{\log d}{\log \delta}$ on trouve que $\varepsilon_1 > 0$ dès que $\varepsilon > 0$. En réarrangeant des termes dans (3.41), puis divisant par $(n-k)\log d$ nous pouvons réécrire (3.41) comme

$$\frac{1}{\log d}\left(\frac{1}{n-k}\left(\frac{\log d}{\log \delta} - 1\right)\log\theta(W) + \frac{1}{n-k}\log d(W)\right) + \frac{\varepsilon_1}{(n-k)\log d}\log\theta(W) \leq \frac{1}{\log d}\left(\log\theta(W) - \log d(W)\right). \tag{3.42}$$

Compte tenu des définitions (3.39) et (3.40) nous réécrivons (3.42) comme

$$\frac{1}{\log \delta}\log D' - \frac{\log c}{\log \delta} + \frac{\varepsilon_1}{(n-k)\log d}\log\theta(W) \leq T - 2\cdot\frac{\log c + \log\log c}{\log \delta}. \tag{3.43}$$

Pour finir la vérification de (3.32) il nous reste à remarquer que quelles que soient les constantes $\varepsilon_1 > 0$, $C_1 > 0$ nous pouvons toujours prendre c suffisamment grande pour assurer avec toute valeur de $\theta(W)$

$$C_1 + \frac{\log\log\theta(W)}{\delta} < \frac{\log c}{\log \delta} + \frac{\varepsilon_1}{(n-k)\log d}\log\theta(W). \tag{3.44}$$

En remarquant (3.44) nous estimons avec (3.42) et (3.43) (pour des valeurs de c suffisamment grandes)

$$\begin{aligned}
T &\geq \frac{1}{\log\delta}\log D' - \frac{\log c}{\log\delta} + \frac{\varepsilon_1}{(n-k)\log d}\log\theta(W) + 2\cdot\frac{\log c + \log\log c}{\log\delta} \\
&> \frac{1}{\log\delta}\log D' + \frac{\varepsilon_1}{(n-k)\log d}\log\theta(W) + \frac{\log c}{\log\delta} \\
&> \frac{1}{\log\delta}\log D' + \frac{1}{\log\delta}\log\log D' + \frac{\log\left(19(n+1)c_2\right) - \log|\log|c_3'' y||}{\log\delta},
\end{aligned}$$

ainsi établissant (3.32).

Notons $y_1 = y$, y_2, ..., y_t l'ensemble des conjugués de y (qui est ainsi supposé d'être de degré t sur $\mathbb{Q}$). Posons

$$\tilde{P}_{D,T}(X_1,\ldots,X_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{den}(y)^{t\cdot\deg_{\mathbf{z}}(P_{D,T})} \times \prod_{i=1}^{t} P_{D,T}(y_i, X_1,\ldots,X_n),$$

c'est un polynôme à coefficients entiers de degré $\leq t\cdot D$ en $X_1,\ldots,X_n$ et de longueur

$$L(\tilde{P}_{D,T}) \leq \exp\left(\tilde{c}_6 D d^T\right). \tag{3.45}$$

On vérifie (3.31) car $T_0 \leq CD^{n+1}$ vu le théorème 3.11 (rappelons que nous notons $T_0 = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}F(\mathbf{z})$) et $\delta^T \geq cD\log D$ et la proposition 3.18 montre que le polynôme $P_{D,T}$ satisfait $P_{D,T}(\underline{x}) = F(p^{[T]}(y))$ et donc

$$\exp(-c_7 D^{n+1}\delta^T) \leq |P_{D,T}(\underline{x})| \leq \exp(-c_8 D^{n+1}\delta^T), \tag{3.46}$$

où

$$\underline{x} = (y, f_1(y),\ldots,f_n(y)) \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Plus grande est la constante c_7 dans la minoration de (3.46) plus faible est cette minoration. Ainsi nous pouvons supposer que la constante c_7 est suffisamment grande, en particulier, nous pouvons supposer $c_7 > \frac{2c'c_8}{4\tilde{c}_6}$, où c' est la constante de (3.49) ci-dessous.

On applique le corollaire 1.34 au point $\underline{x}' = (f_1(y),\ldots,f_n(y)) \in \mathbb{C}^n$ avec

$$\begin{aligned}
m = n, \quad 0 \leq k = \dim W < n + 1 - \frac{\log d}{\log\delta}, \delta = D', \\
\tau = \tilde{c}_6 D' d^T, \sigma = \frac{4c_7}{c_8}, \quad U = \frac{1}{2}c_8 D'^{n+1}\delta^T.
\end{aligned}$$

Pour tout réel

$$\tau < s \leq U \tag{3.47}$$

on pose $Q_s(X_1,\dots,X_n) = \tilde{P}_{D_s,T}(X_1,\dots,X_n)$ pour $D_s = \left[\left(\frac{2s}{c_8\delta^T}\right)^{1/(n+1)}\right]$ et T défini dans (3.40). Les restrictions (3.47) impliquent

$$\left[\left(\frac{4\tilde{c}_6}{c_8}D'\left(\frac{d}{\delta}\right)^T\right)^{\frac{1}{n+1}}\right] \leq D_s = \left[\left(\frac{2s}{c_8\delta^T}\right)^{1/(n+1)}\right] \leq D', \tag{3.48}$$

et ainsi la quantité $e(s)$ du théorème 1.35 satisfait

$$e(s) = \left[\frac{D_s}{D'}\right] + 1 \leq 2 = \lambda.$$

Nous déduisons (1.75) de (3.46). On remarquera que

$$\prod_{i=1}^{n+1}\left(1+|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}\deg_{X_i} P_{D_s,T}} \leq \exp\left(c' D_s d^T\right) \tag{3.49}$$

pour une constante c', et les inégalités (3.48) entraînent (pour la constante c dans (3.39) suffisamment grande)

$$\prod_{i=1}^{n+1}\left(1+|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}\deg_{X_i} P_{D_s,T}} < e^{\frac{1}{2}c_7 D_s^{n+1}\delta^T}.$$

On vérifie avec la définition de D' que pour c suffisamment grande on a

$$[K:\mathbb{Q}]\cdot 3\lambda^{k+1}\delta^k\left(\delta_{k+1}t(W) + (k+1)\tau d(W)\right) \leq U/\left((n+1)\sigma\right)^{k+1}$$

et on obtient avec l'application du théorème 1.34 :

$$\log \mathrm{Dist}(\underline{x}, W) \geq -U = -C\theta(W)^{\frac{n+1}{n-k}-\frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} d(W)^{\frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}},$$

ce qui achève d'établir le théorème 0.5.■

Démonstration du théorème 0.8. Nous suivons la même ligne de démonstration que dans la preuve du théorème 0.5 En particulier, nous utiliserons ici les polynômes $P_{D,T}$ définis dans la démonstration du théorème 0.5 (nous renvoyons le lecteur à cette démonstration ci-dessus pour les détails). Rappelons, que ce sont des polynômes définis à partir de deux paramètres D et T de degré $\leq c_4 D(d^T + \cdots + 1)$ en $\mathbf{z}$, de degré $< D$ en $X_1,\dots,X_n$ et de longueur $\leq \exp\left(c_6 D d^T\right)$. De plus, si D et T satisfont (3.32), alors $P_{D,T}$ satisfait les estimations (3.46).

Soit $W \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}}$ une variété de dimension $k < n+1-2\frac{\log d}{\log\delta}$, posons

$$\theta(W) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left(h(W), d(W)^{\frac{n+1-k-\frac{\log d}{\log\delta}+\varepsilon}{n+1-k-2\frac{\log d}{\log\delta}}}\right),$$

$$D' := c\left(\theta(W)^{2-\frac{\log\delta}{\log d}}d(W)^{\frac{\log\delta}{\log d}-1}\right)^{1/(n-k)}, \tag{3.50}$$

$$T := \frac{1}{\log d}\log\left(\frac{\theta(W)}{d(W)}\right)+\frac{\log c+\log\log c}{\log\delta}, \tag{3.51}$$

où c désigne une constante suffisamment grande. On vérifie, en suivant le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 0.5, que les paramètres D' et T satisfont (3.32). Ainsi pour tout $D \leq D'$ le polynôme $P_{D,T}$ (construit à partir de D et T donné par (3.51)) satisfait les estimations (3.46).

On applique le critère pour les mesures (théorème 1.35) au point $\underline{x} = (y, f_1(y), \ldots, f_n(y)) \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec

$$m = n+1, \quad 0 \leq k = \dim W < n+1-2\frac{\log d}{\log\delta}, \quad \lambda = 2,$$
$$\delta_1 = \tau = c_6D'd^T, \delta_2 = \cdots = \delta_{n+1} = D', \quad \sigma = 4c_7/c_8, \quad U = D'^{n+1}\delta^T$$

Pour tout réel

$$\tau\lambda < s \leq U \tag{3.52}$$

on pose $R_s = P_{D_s,T}$ pour pour $D_s = \left(\frac{2s}{c_8\delta^T}\right)^{1/(n+1)}$ et T défini dans (3.51). Les restrictions (3.47) impliquent

$$\left(\frac{4c_6}{c_8}D'\left(\frac{d}{\delta}\right)^T\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq D_s = \left(\frac{2s}{c_8\delta^T}\right)^{1/(n+1)} \leq D', \tag{3.53}$$

et ainsi la quantité $e(s)$ du théorème 1.35 satisfait

$$e(s) \leq 2 = \lambda.$$

Nous avons donc bien (1.75).

On vérifie avec la définition de D'

$$3\lambda^{k+1}\delta_1\cdots\delta_k\left(\delta_{k+1}t(W)+(k+1)\tau d(W)\right) \leq U/\left((n+1)\sigma\right)^{k+1}$$

et nous déduisons avec le théorème 1.35 :

$$\log\mathrm{Dist}(\underline{x}, W) \geq -U = -C\theta(W)^{2\cdot\frac{n+1}{n-k}-\frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}}d(W)^{\frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}-\frac{n+1}{n-k}},$$

ce qui achève d'établir le théorème 0.8.■

Maintenant nous allons prouver le théorème 0.11. Pour ceci nous utilisons le résultat suivant :

Lemme 3.19. *Soient $p, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ des polynômes et soient $f_j \in \mathbb{C}[[\mathbf{z}]]$, $j = 1, \ldots, n$ des séries formelles satisfaisant le système*

$$f_j(\mathbf{z}) = f_j(p(\mathbf{z})) + q_j(\mathbf{z}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Supposons que p est un polynôme non-constant et $f_1, \dots, f_n$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}(\mathbf{z})$. Alors il existe des nombres complexes c_j, $j = 1, \dots, n$, non tous nuls, et une fraction rationnelle $g \in \mathbb{C}(\mathbf{z})$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. $g(\mathbf{z}) = g(p(\mathbf{z})) + \sum_{j=1}^{n} c_j q_j(\mathbf{z})$,
2. *il existe un $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, tel que*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})\right)^m \in \mathbb{C}(\mathbf{z}).$$

Démonstration. C'est un cas particulier du lemme 6 de [49], ou encore du théorème 2 de [22].■

Nous déduisons du lemme 3.19 le résultat suivant :

Lemme 3.20. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $q_i \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, $i = 1, \dots, n$ et $p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ satisfaisant $q_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $p(0) = 0$ et $p(\mathbf{z}) \neq \mathbf{z}$. Soient $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathbb{C}((\mathbf{z}))$ des fonctions définies par (21). Supposons que $1, q_1, \dots, q_n$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes et qu'au moins une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $\deg p \nmid \deg\left(\sum_{i=1}^{n} s_i q_i(\mathbf{z})\right)$ *pour tout* $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} s_i \chi_i(\mathbf{z}) \notin \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ *pour tout* $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$.

Alors les fonctions $\chi_1, \dots, \chi_n$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(\mathbf{z})$.

Démonstration. Dans le cas où on a la condition 1 de l'énoncé, l'indépendance algébrique des fonctions $\chi_1, \dots, \chi_n$ sur $\mathbb{C}(\mathbf{z})$ est démontré dans [49] (cf. la démonstration du corollaire 4 de cette référence). Donc il nous suffit de considérer le cas où les fonctions $\chi_1, \dots, \chi_n$ satisfont la condition 2 de l'énoncé.

Ad absurdum, supposons que $\chi_1, \dots, \chi_n$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}(\mathbf{z})$. Alors nous pouvons appliquer le lemme 3.19, en déduisant l'existence de nombres complexes $c_1, \dots, c_n$, d'un nombre entier strictement positif $m \in \mathbb{N}^*$ et de fractions rationnelles $g(\mathbf{z}), t(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}(\mathbf{z})$ satisfaisant

$$g(\mathbf{z}) = g(p(\mathbf{z})) + \sum_{j=1}^{n} c_j q_j(\mathbf{z}), \tag{3.54}$$

$$t(\mathbf{z}) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_j(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})\right)^m. \tag{3.55}$$

En notant $\chi(\mathbf{z}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_j(\mathbf{z})$, $q(\mathbf{z}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j q_j(\mathbf{z})$, nous pouvons réécrire (3.54) et (3.55) comme

$$g(\mathbf{z}) = g(p(\mathbf{z})) + q(\mathbf{z}), \tag{3.56}$$

$$t(\mathbf{z}) = (\chi(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z}))^m. \tag{3.57}$$

De plus, vu le système (22), la fonction χ satisfait l'équation

$$\chi(\mathbf{z}) = \chi(p(\mathbf{z})) + q(\mathbf{z}). \tag{3.58}$$

En substituant (3.56) et (3.58) dans (3.57) nous obtenons

$$t(p(\mathbf{z})) = t(\mathbf{z}),$$

qui implique $t(\mathbf{z}) = t \in \mathbb{C}$ car $p(\mathbf{z}) \neq \mathbf{z}$ et donc

$$\chi(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}) + t^{1/m} \in \mathbb{C}(\mathbf{z}).$$

Il est montré dans la démonstration du corollaire 4 de [49] qu'en fait $g(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, donc on trouve finalement

$$\chi(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}],$$

c'est qui contredit l'hypothèse 2 de l'énoncé et ainsi montre l'indépendance algébrique des fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_n$ sur $\mathbb{C}(\mathbf{z})$.■

Remarque 3.21. Dans le lemme 3.20 la condition 1 entraîne la condition 2, si les fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_n$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}(\mathbf{z})$, alors elles satisfont une équation de la forme $\sum_{i=1}^{n} s_i \chi_i(\mathbf{z}) = t(\mathbf{z})$ (où $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$ et $t(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$).

Remarque 3.22. L'exemple $q(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2 - \mathbf{z}^4$, $p(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2$ et $\chi(\mathbf{z}) = \sum_{h=0}^{\infty} q(p^{[h]}(\mathbf{z})) = \mathbf{z}^2$ montre que les conditions du type 1, 2 imposées dans le lemme 3.20 sont indispensables. Plus généralement, soient $p(\mathbf{z}), q(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ des polynômes, satisfaisant $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} q \geq 1$, $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} p \geq 1$, $p(\mathbf{z}) \neq \mathbf{z}$ et

$$\chi(\mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h=0}^{\infty} q\left(p^{[h]}(\mathbf{z})\right) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] \tag{3.59}$$

(par exemple, on peut prendre $p(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^d$ et $q(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^d - \mathbf{z}^{2d}$), $d \geq 2$. Soient $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ des polynômes tels que pour un ensemble $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ on ait $\sum_{i=1}^{n} c_i q_i(\mathbf{z}) = p(\mathbf{z})$. Alors $\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ (où les fonctions χ_i sont définies dans (21). Le lemme 3.20 (notamment le cas 2) montre que cet exemple décrit tous les ensembles de fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_n$ algébriquement dépendantes (où χ_i, $i = 1, \ldots, n$ sont définies comme dans (21)). Ainsi la description des ensembles de fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_n$ algébriquement dépendantes est équivalente à la description des couples des polynômes $p(\mathbf{z}), q(\mathbf{z})$ tels que l'on ait (3.59).

Démonstration du théorème 0.11. Par le lemme 3.20 les fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_n$ sont algébriquement indépendantes dans des cas 1, 2 de l'énoncé (car ces cas coïncident avec les cas 1, 2 considérés dans le lemme 3.20). Ainsi nous montrons le théorème par application des théorèmes 0.5 et 0.8.■

Nous améliorons enfin le théorème 2 de [49], qualitativement et quantitativement.

Théorème 3.23. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un voisinage de 0 et soient $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques algébriquement indépendantes. Supposons que les coefficients des développements de Taylor des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ au point 0 appartiennent à un corps de nombres K et que ce n-uplet de fonctions satisfait (3.21) (avec $p(\mathbf{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}(\mathbf{z})$, nous supposons $d = \deg p$, $\delta = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} p \geq 2$). Supposons de plus que $f_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, et donnons-nous un nombre complexe $y \in U \cap \overline{\mathbb{Q}}$ satisfaisant $\lim_{m\to\infty} p^{[m]}(y) = 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ que le nombre complexe $p^{[m]}(y) \neq 0$ ne soit pas un zéro de* $\det A(\mathbf{z})$ *ni de $a(\mathbf{z})$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute variété $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ de dimension $k < 2n + 1 - \frac{\log d}{\log \delta}(n+1)$, on ait*

$$\log \mathrm{Dist}(\underline{x}, W) \geq -C\left(h(W) + d(W)^{\frac{1}{1-\frac{\log d}{\log\delta}\frac{n+1}{2n-k+1}}}\right)^{\frac{n+1}{n-k} - \frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} d(W)^{\frac{k+1}{n-k}},$$

où $\underline{x} = (1 : f_1(y) : \ldots : f_n(y)) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. En particulier, on a

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(f_1(y), \ldots, f_n(y)\right) \geq 2n + 1 - \frac{\log d}{\log\delta}(n+1). \tag{3.60}$$

Démonstration. Soit $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ une variété de dimension $k < 2n+1-\frac{\log d}{\log\delta}(n+1)$, posons

$$\theta(W) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\left(h(W), d(W)^{\frac{1}{1-\frac{\log d}{\log\delta}\frac{n+1}{2n-k+1}}}\right), \tag{3.61}$$

$$D \quad := \quad c\left(\theta(W)^{1-\frac{\log\delta}{\log d}} d(W)^{\frac{\log\delta}{\log d}}\right)^{1/(n-k)}, \tag{3.62}$$

$$T \quad := \quad \frac{1}{\log d}\log\left(\frac{\theta(W)}{d(W)}\right) + \frac{(n+1)\log c + \log\log c}{\log\delta}, \tag{3.63}$$

où c désigne une constante suffisamment grande.

On applique le théorème 1.35 au point $\underline{x} = (f_1(y), \ldots, f_n(y)) \in \mathbb{C}^n$ avec

$$m = n, \quad 0 \leq k = \dim W < n, \quad \lambda = 2,$$
$$\tau = C_2' D d^T, \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = D, \quad \sigma = C_5/C_6, \quad U = \frac{1}{2}C_6 D^{n+1}\delta^T,$$

où $C_2' = (C_1 + C_2)\left(1 + \frac{1}{C_3}\right)$.

Vu le lemme 3.14 il existe des polynômes $R_{T,D} \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}, \underline{X}]$ satisfaisant (3.24)-(3.26).

En substituant les valeurs de D et T données par (3.62) et (3.63) dans (3.27), on vérifie par un calcul direct que cette condition est satisfaite pour $k < 2n+1-\frac{\log d}{\log\delta}(n+1)$. En effet, dans ce cas $\delta^T = \left(\frac{\theta(W)}{d(W)}\right)^{\frac{\log\delta}{\log d}} \times c^{n+1}\log c$ et $D^{n+1} = \theta(W)^{(1-\frac{\log\delta}{\log d})\frac{n+1}{n-k}} d(W)^{\frac{\log\delta}{\log d}\frac{n+1}{n-k}} \times c^{n+1}$ et on voit que (3.27) est satisfaite avec $c > \mathrm{e}^{C_3}$ et $\theta(W)$ donné par (3.61).

On vérifie aussi $\tau\lambda < U$ et pour tout réel

$$\tau\lambda < s \leq U \tag{3.64}$$

on pose $R_s(\underline{X}) = R_{T,D_s}(y,\underline{X}) \in \mathbb{Q}(y)[\underline{X}]$ pour $D_s = \left[\left(\frac{2s}{C_6\delta^T}\right)^{1/(n+1)}\right]$ et T défini dans (3.63). Les restrictions (3.64) impliquent

$$\left[\left(\frac{4C_2'D}{C_6}\cdot\left(\frac{d}{\delta}\right)^T\right)^{\frac{1}{n+1}}\right] \leq D_s = \left[\left(\frac{2s}{C_6\delta^T}\right)^{1/(n+1)}\right] \leq D, \tag{3.65}$$

et ainsi la quantité $e(s)$ du théorème 1.35 satisfait

$$e(s) \leq \lambda.$$

De plus (3.65) implique que pour $k < 2n+1-\frac{\log d}{\log\delta}(n+1)$ la condition (3.27) est satisfaite, et ainsi les polynômes R_{T,D_s} satisfont (3.28). Nous avons donc bien la condition (1.75) du théorème 1.35.

On vérifie avec la définition de D et T, quitte à ajuster la constante c,

$$[\mathbb{Q}(y):\mathbb{Q}]\cdot 3\lambda^{k+1}\delta_1\cdots\delta_k\left(\delta_{k+1}t(W)+(k+1)\tau d(W)\right) \leq U/\left((n+1)\sigma\right)^{k+1}$$

et nous déduisons avec le théorème 1.35 :

$$\log\operatorname{Dist}(\underline{x},W) \geq -U = -C\theta(W)^{\frac{n+1}{n-k}-\frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}} d(W)^{\frac{\log\delta}{\log d}\frac{k+1}{n-k}},$$

ce qui achève d'établir le théorème 3.23.■

Remarque 3.24. Notre théorème 3.23 couvre strictement les théorèmes 1 et 2 de [49]. Par rapport au théorème 2 de [49], notre théorème 3.23 a l'avantage de fournir une mesure d'indépendance algébrique, mais aussi améliore l'estimation du degré de transcendance. *Grosso modo* notre minoration du degré de transcendence est $\frac{\log d}{\log\delta}$ mieux que l'estimation correspondante donnée dans le théorème 2 de [49]. Signalons que pour $\frac{\log d}{\log\delta}$ suffisamment grand (c'est à dire, $\frac{\log d}{\log\delta} \geq \frac{2n+1}{n+1}$) les deux estimations ne donnent que des minorations triviales.

Montrons que notre estimation donne pour tout $\frac{\log d}{\log\delta}$ entre 1 et $\frac{2n+1}{n+1}$ au moins l'estimation du théorème 2 de [49]. Comme cette dernière est $\operatorname{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(f_1(y),\ldots,f_n(y)\right) \geq \left\lceil\left(\frac{2\log\delta}{\log d}-1\right)n+\frac{\log\delta}{\log d}-1\right\rceil$, et la nôtre est donnée par (3.60) (que l'on peut mettre sous la forme $\operatorname{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(f_1(y),\ldots,f_n(y)\right) \geq \left\lceil 2n+1-\frac{\log d}{\log\delta}(n+1)\right\rceil$) il nous suffit de montrer

$$2n+1-\frac{\log d}{\log\delta}(n+1) \geq n\left(\frac{2\log\delta}{\log d}-1\right)+\frac{\log\delta}{\log d}-1. \tag{3.66}$$

En notant $x = \frac{\log d}{\log \delta}$ il nous suffit de montrer l'estimation

$$2n + 1 - (n + 1)x \geq n\left(\frac{2}{x} - 1\right) + \frac{1}{x} - 1 \tag{3.67}$$

pour $x \in [1, \frac{2n+1}{n+1}]$. On peut réécrire cette dernière inégalité comme

$$(n + 1)x^2 - (3n + 2)x + (2n + 1) \leq 0, \tag{3.68}$$

puis factoriser

$$(n + 1)x^2 - (3n + 2)x + (2n + 1) = (x - 1)((n + 1)x - 2n - 1)$$

qui montre (3.68) pour $x \in [1, \frac{2n+1}{n+1}]$.

Asymptotiquement, pour n grand et $\frac{\log d}{\log \delta} = \frac{3}{2}$ on obtient une minoration du degré de transcendance par $\frac{n}{2}$ au lieu de $\frac{n}{3}$.

Démonstration du théorème 0.12. Nous vérifions comme dans la démonstration du théorème 0.11 que les fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_n$ sont algébriquement indépendantes. Donc le résultat est une conséquence immédiate du théorème 3.23.■

Démonstration du théorème 0.14. Nous vérifions comme dans la démonstration du corollaire 6 de [49] que les fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont algébriquement indépendantes. Donc le résultat est une conséquence immédiate du théorème 3.23.■

Chapitre 4

Varia

Le théorème 2.16 permet de déduire le lemme de multiplicité sous l'hypothèse (2.28) pour des idéaux ϕ-stables. Il semble difficile d'assurer cette propriété en général. Même dans le cas (très important) d'idéaux différentiels les recherches sont restreintes à ce moment aux démonstrations des résultats correspondants dans des cas particuliers. Par exemple, il est démontré dans [31] l'inégalité (2.28) (en fait même une estimation plus forte) pour la dérivation D associée au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} P = \dfrac{1}{12z}\left(P^2 - Q\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial z} Q = \dfrac{1}{3z}\left(PQ - R\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial z} P = \dfrac{1}{2z}\left(PR - Q^2\right), \end{cases}$$

et maintenant on dispose même de la classification complète des idéaux D-stables dans ce cas [35]. Néanmoins, on ne peux toujours pas fournir un tel résultat pour des systèmes analogues de dimension plus grande. Même en dimension 2 et 3 ce problème semble difficile en déhors de circonstances particulières.

Il est remarquable, que dans tous les cas où l'on sait à établir (2.28), on démontre en fait une estimation plus forte :

$$\mathrm{ord}_{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}} \mathcal{Q} \leq C, \tag{4.1}$$

où $\mathcal{Q}$ désigne un idéal premier ϕ-stable et C une constante qui ne depend que de $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}$. Ceci nous amène au problème suivant :

Problème 4.1. Pour une transformation $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (e.g. un opérateur différentiel ou un morphisme algébrique possédant un point fixe ω transcendant sur $\Bbbk$ etc.) est-il vrai que s'il existe une constante K_0 telle que l'on ait (2.28) pour tout idéal ϕ-stable, alors il existe une constante C telle que l'on a (4.1) pour tout idéal ϕ-stable ? Autrement dit, est-ce qu'un contrôle de l'ordre des idéaux stables linéaire en le degré, entraîne que cet ordre doit être uniformement borné ?

Remarque 4.2. Dans le cas général, si nous n'imposons à la transformation $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ d'autres conditions que (2.1), (2.4) et la condition que ϕ soit correcte (par rapport à certains idéaux), on a un exemple évident pour le problème 4.1 montrant qu'il existe bien une famille infinie d'idéaux stables J_k ne satisfaisant pas (4.1) mais satisfaisant (2.28). Il suffit de prendre pour ϕ une application algébrique associée à une rotation affine avec un centre ω et pour J_k des idéaux de fonctions régulières s'annulant sur les cercles de centre ω et de rayon $\frac{1}{k}$.

Dans le cas des morphismes algébriques réguliers, l'étude des idéaux stables se rattache également à la dynamique. En particulier, on trouvera dans [54] une présentation des résultats connus. Ainsi est-il montré que les variétés stables lisses sont couvertes par des courbes rationnelles (cf. §2.2, en particulier la proposition 2.2.1) et une classification des surfaces stables est donnée (cf. proposition 2.3.1).

Nous allons considérer dans ce chapitre, comme nous l'avons fait dans le chapitre 3, la transformation rationnelle $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ définie par (2.118). Rappelons que nous notons $s = \deg_{\underline{X}'} A_i$, $t = \deg_{\underline{X}} A_i$ $(i = 0, ..., n)$ et $r = \deg_{\underline{X}'} A_i'$ $(i = 0, 1)$.

Dans ce chapitre nous avons collecté quelques lemmes qui nous semblent potentiellement utiles dans l'étude des idéaux $\mathcal{T}$-stables. À titre indicatif nous déduisons à l'aide de ces outils un lemme de multiplicité dans un cas particulier de deux fonctions (avec une hypothèse supplémentaire 4.8).

4.1 Lemmes techniques

Lemme 4.3. *Soit $\mathcal{T}$ une transformation définie par (2.118) et dominante. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^1_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}} \times \mathbb{P}^n_{\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}}$ un point n'appartenant a aucune sous-variété $V \subset \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ définie sur $\Bbbk$ différente de tout l'espace. Alors on a exactement $\deg \mathcal{T}$ points dans l'ensemble $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\mathbf{x})$.*

Démonstration. Sur un ensemble ouvert $\mathcal{U}_1$ au sens de la topologie de Zariski la transformation $\mathcal{T}$ est un morphisme étale (proposition 4.5, exposé I de [19]). Notons E un fermé complémentaire de cet ouvert. Comme $\mathcal{T}$ et E sont définis sur $\Bbbk$, $\mathcal{T}(E)$ l'est aussi. Donc la clôture de Zariski de $\mathcal{T}(E)$ est définie sur $\Bbbk$ (l'ensemble $\mathcal{T}(E)$ est constructible sur $\Bbbk$, donc sa clôture de Zariski est définie aussi sur $\Bbbk$).

Par le même raisonnement (avec le théorème principal de Zariski) on arrive à la situation où après exclusion d'un fermé défini sur $\Bbbk$ (et de codimension au moins 1) la transformation $\mathcal{T}$ devient un morphisme fini sur un ouvert $\mathcal{U}_2$, donc finalement étale et fini sur $\mathcal{U}_{\mathcal{T}} := \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

Comme tout système de coordonnées projectives $\underline{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$ est de degré de transcendance au moins $n+1$ sur $\Bbbk$ et $\mathcal{T}$ est dominant, défini sur $\Bbbk$, $\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}})$ a le même degré de transcendance que $\underline{\mathbf{x}}$, donc au moins $n+1$, et ainsi $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ n'appartient à aucune sous-variété fermée (différente de tout l'espace) définie sur $\Bbbk$.

Par la proposition 10.9, exposé I de [19] on a qu'après la restriction à un ouvert (non-vide, défini sur $\Bbbk$) le nombre des préimages est une fonction constante au voisinage de Zariski du point $\mathcal{T}(\mathbf{x})$. En fait comme on le sait (c'est aussi démontré dans l'exposé I de [19]) cela signifie que tout point dans cet ouvert de Zariski a le nombre maximal possible de préimages (i.e. égal à $\deg \mathcal{T}$).■

Remarque 4.4. Remarquons que si une transformation $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ est dominante, alors $\mathcal{T}(\mathcal{U}_{\mathcal{T}})$ est Zariski-dense dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$, et ainsi la clôture de Zariski du complément de $\mathcal{U}_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}(\mathcal{U}_{\mathcal{T}})$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ est un fermé de Zariski strictement plus petit que tout l'espace $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$. Nous notons ce fermé $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$.

Pour tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ et tout système de coordonnées projectives $\underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n) \in \Bbbk((\mathbf{z}))^{n+3}$ notons $\pi_0(\underline{\mathbf{x}}) = (\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) \in \Bbbk((\mathbf{z}))^2$ et $\pi_1(\underline{\mathbf{x}}) \in (\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n) \in \Bbbk((\mathbf{z}))^{n+1}$ de sorte que $\pi_0(\underline{\mathbf{x}})$ soit un système de coordonnées projectives de $\pi_0(\mathbf{x})$ et $\pi_1(\underline{\mathbf{x}})$ soit un système de coordonnées projectives de $\pi_1(\mathbf{x})$ (où π_0 et π_1 sont les projections définies sur la page 84).

Pour la suite fixons une transformation $\mathcal{T}$ définie par (2.118) et satisfaisant l'hypothèse 3.1. Fixons une fois pour toutes un ensemble de coordonnées biprojectives $\underline{\mathbf{g}}$ de $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ satisfaisant

Ia) $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1, \mathbf{z}, \mathbf{z}^C, \mathbf{z}^C f_1(\mathbf{z}), ..., \mathbf{z}^C f_n(\mathbf{z}))$ où C désigne un nombre rationnel,

Ib) $\min_{\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \underline{\mathbf{g}} = 0$,

Ic) $\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})$ pour tout $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$.

Des systèmes de coordonnées biprojectives satisfaisant (*Ia*), (*Ib*) et (*Ic*) existent. En effet, les racines $\underline{\mathbf{g}}_0$ du système d'équations polynômiales

$$\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}_0) = \underline{\mathcal{T}}(1, \mathbf{z}, 1, f_1(\mathbf{z}), ..., f_n(\mathbf{z})) \tag{4.2}$$

satisfont (*Ic*) avec $\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = (1, \mathbf{z}, 1, f_1(\mathbf{z}), ..., f_n(\mathbf{z}))$, et ainsi l'ensemble des systèmes de coordonnées biprojectives

$$\underline{\mathbf{g}} := \mathbf{z}^{-\min_{\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \underline{\mathbf{g}}_0} \underline{\mathbf{g}}_0$$

satisfait (*Ic*), (*Ib*) et (*Ia*) avec $C = -\min_{\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \underline{\mathbf{g}}_0$.

Une fois choisis, les systèmes de coordonnées biprojectives $\underline{\mathbf{g}}$ ne dépendent que de $\tilde{\mathbf{f}}$ et de $\mathcal{T}$. Notons

$$C' = \max_{\substack{\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}}) \\ i=0,1}} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} \pi_i(\underline{\mathbf{g}}). \tag{4.3}$$

Remarquons que cette définition et la propriété Ib) implique $C' \geq 0$.

Dans la suite nous notons

$$\underline{B}(\underline{\mathbf{g}}, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{\mathbf{y}} \in \overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}^{n+3} \mid \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{g}} - \underline{\mathbf{y}}) \geq r\}, \tag{4.4}$$

où $\underline{\mathbf{g}}$ désigne le système de coordonnées biprojectives satisfaisant Ia), Ib) et Ic) d'un $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ et $r \in \mathbb{R}$.

Nous notons aussi

$$\mathbf{B}(\mathbf{g}, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \mid \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{f}, \mathbf{y}) \geq r\}, \tag{4.5}$$

Choisissons un nombre suffisamment grand C_4 de sorte que pour tous $\mathbf{g} \neq \mathbf{g}' \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ on ait

$$C_4 > \mathrm{Ord}_{z=0}(\mathbf{g}, \mathbf{g}') + 2C' \tag{4.6}$$

et

$$C_4 > \max_{\substack{\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}}) \\ \mathbf{y} \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}}} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{g}} - \underline{\mathbf{y}}) \tag{4.7}$$

La condition (4.7) assure que tous les éléments des boules $\underline{B}(\underline{\mathbf{g}}, C_4)$ représente des points de $\mathcal{U}_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}(\mathcal{U}_{\mathcal{T}})$ pour tout $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ (rappelons que $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ est défini dans le lemme 4.3 et $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ est défini dans la remarque 4.4). En particulier, (4.6) implique $C_4 > C' \geq 0$

Notons

$$R = \max_{\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})} \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\det J\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}})), \tag{4.8}$$

où $J\underline{\mathcal{T}}$ désigne la matrice jacobienne de la transformation $\underline{\mathcal{T}}$. Remarquons que la valeur de R est finie ($\det J\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}) \neq 0$, car $\mathcal{T}$ est étale en tout point $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$). De plus, vu la propriété Ib) on a $R \geq 0$.

Lemme 4.5. *Soient $\mathbf{g} \neq \mathbf{g}' \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ et ρ un nombre réel. Supposons qu'il existe un point $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ et deux de ses systèmes de coordonnées projectives $\underline{\mathbf{x}}$ et $\underline{\mathbf{x}}'$ tels que*

$$\underline{\mathbf{x}} \in \underline{B}(\underline{\mathbf{g}}, \rho) \tag{4.9}$$

et

$$\underline{\mathbf{x}}' \in \underline{B}(\underline{\mathbf{g}}', \rho). \tag{4.10}$$

Alors $\rho < C_4$.

Démonstration. Les $\pi_i(\underline{\mathbf{x}})$ et $\pi_i(\underline{\mathbf{x}}')$, $i = 0, 1$ sont les coordonnées projectives du même point projectif $\pi_i(\mathbf{x})$, $i = 0, 1$, et donc il existent $\mathbf{b}_i \in \Bbbk((\mathbf{z}))$, $i = 0, 1$, tels que

$$\pi_i(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{b}_i \pi_i(\underline{\mathbf{x}}') \tag{4.11}$$

(ainsi $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{b}_i) = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{x}})) - \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{x}}'))$).

Supposons *ad absurdum* $\rho \geq C_4 > C'$. Alors, les conditions (4.9), (4.10) impliquent $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}} = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{g}}$, $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{x}}' = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{g}}'$. Mais dans ce cas $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{b}_i = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{g}})) - \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\pi_i(\underline{\mathbf{g}}')$ (et donc, en particulier, $|\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{b}_i| \leq C'$, $i = 0,1$, vu la propriété *Ib*) et la définition de C').

Maintenant, en utilisant le lemme 1.22 (a) et puis (4.11), on estime

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ord}_{z=0}(\underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{g}}') &= \min_{i=0,1} \left(\mathrm{Ord}_{z=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{g}}), \pi_i(\underline{\mathbf{g}}')\right) \\
&\geq \min_{i=0,1} \left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{g}}) - \mathbf{b}_i\pi_i(\underline{\mathbf{g}}')) - C'\right) \\
&\geq \min_{i=0,1} \left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{g}}) - \pi_i(\underline{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}_i\pi_i(\underline{\mathbf{x}}') - \mathbf{b}_i\pi_i(\underline{\mathbf{g}}'))\right) - C' \\
&\geq \min\Bigg(\min_{i=0,1} \left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{g}}) - \pi_i(\underline{\mathbf{x}}))\right), \\
&\qquad \min_{i=0,1} \left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\mathbf{b}_i + \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{g}}') - \pi_i(\underline{\mathbf{x}}'))\right) \Bigg) - C' \\
&\geq \rho - 2C'.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ainsi $\mathrm{Ord}_{z=0}(\underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{g}}') \geq C_4 - 2C'$, car $\rho \geq C_4$, mais ceci est en contradiction avec le choix de C_4 (cf.(4.6)), d'où le lemme.■

Lemme 4.6. (Une variante du lemme de Hensel multivariationnel, cf. [10], chap. III, § 4, n 5°, corollaire 3) *Soit A un anneau commutatif, m un idéal de A tels que le couple (A, m) satisfasse aux conditions de Hensel (pour la définition des conditions de Hensel voir le début de 5°, § 4, chap. III de [10]). Soit n un entier, $\underline{a} \in A^{n+1}$ et $\underline{F} = (F_0, ..., F_n)$ un système de $n+1$ éléments de $A[X_0, ..., X_n]$. Désignons par $e = J_{\underline{F}}(\underline{a})$ le jacobien du système $\underline{F}$ au point $\underline{a}$ et supposons que l'on ait $F_0(\underline{a}), ..., F_n(\underline{a}) \in e^2 m$. Alors il existe un élément $\underline{b} \in A^{n+1}$ tel que*

a) $F_0(\underline{b}) = ... = F_n(\underline{b}) = 0$,

b) $a_0 - b_0, ..., a_n - b_n \in em$.

Démonstration. Soit $M_{\underline{F}}(\underline{x})$ la matrice jacobienne du système $\underline{F}$ de sorte que $\det M_{\underline{F}}(\underline{x}) = J_{\underline{F}}(\underline{a})$. Par l'algèbre linéaire on sait qu'il existe une matrice M' telle que $M_{\underline{F}}(\underline{a})M' = eI_{n+1}$ (où I_{n+1} désigne la matrice unitaire de rang $n+1$). D'après le théorème 2 (iii) de 5°, § 4, chap. III de [10], il existe $\underline{h} = (h_0, ..., h_n)$ un système de séries formelles en X_0,...,X_n sans terme constant tel que

$$\underline{F}(\underline{a} + e\underline{h}(\underline{X})) = \underline{F}(\underline{a}) + eM_{\underline{F}}(\underline{a})\underline{X}. \tag{4.13}$$

Soit $\underline{z} \in A^{n+1}$, substituons $M'\underline{z}$ au lieu de $\underline{X}$ dans (4.13). Nous obtenons

$$\underline{F}(\underline{a} + e\underline{h}(M'\underline{z})) = \underline{F}(\underline{a}) + e^2\underline{z}, \tag{4.14}$$

car $M_{\underline{F}}(\underline{a})M' = eI_{n+1}$.

Par l'hypothèse de l'énoncé $F_i(\underline{a}) \in e^2m$, $i = 0, ..., n$, c'est-à-dire que l'on a $F(\underline{a}) = e^2c_i$ avec $c_i \in m$, $i = 0, ..., n$. En substituant $-\underline{c}$ au lieu de $\underline{z}$ dans (4.14) nous obtenons

$$\underline{F}(\underline{a} + e\underline{h}(-M'\underline{c})) = 0. \tag{4.15}$$

Vu que $\underline{h}$ est un système de séries formelles sans terme constant, on a $h_0(-M'\underline{c}), ..., h_n(-M'\underline{c}) \in m$, donc en choisissant $\underline{b} = \underline{a} + e\underline{h}(-M'\underline{c})$ nous satisfaisons les deux conditions (a) et (b). ■

Lemme 4.7. *a) Il existe une constante réelle positive C_3 ne dépendant que de $\tilde{\mathbf{f}}$ et $\mathcal{T}$ telle que pour tout $\mathbf{x} \in \left(\mathbb{P}^1_{\Bbbk((\mathbf{z}))} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk((\mathbf{z}))}\right) \setminus \operatorname{irr}\mathcal{T}$ il existe un point $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ satisfaisant*

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})) \leq C_3 + \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{x}, \mathbf{g}). \tag{4.16}$$

b) Il existe une constante réelle positive $\tilde{C}_3$ (ne dépendant que de $\tilde{\mathbf{f}}$ et $\mathcal{T}$) telle que pour tout $\mathbf{x} \in \left(\mathbb{P}^1_{\Bbbk((\mathbf{z}))} \times \mathbb{P}^n_{\Bbbk((\mathbf{z}))}\right) \setminus \operatorname{irr}\mathcal{T}$ on a

$$-\tilde{C}_3 + \max_{\mathbf{g}\in\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})} \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \leq \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})). \tag{4.17}$$

c) De plus, il existe une constante C_5' telle que si pour un $\mathbf{y} \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ on a

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{y}, \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})) > C_3 + C_5',$$

alors il existe exactement $\deg\mathcal{T}$ *points dans $\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{y})$, un point dans chacune des boules $B(\mathbf{g}, C_5')$ pour $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ et si on désigne par $\mathbf{x_g}$ le point dans $\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{y}) \cap B(\mathbf{g}, C_5')$ on a pour tous $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$*

$$|\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{x}_{\mathbf{g}_1}, \mathbf{g}_1) - \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{x}_{\mathbf{g}_2}, \mathbf{g}_2)| \leq C_3 + \tilde{C}_3. \tag{4.18}$$

Démonstration. Notons $K = \Bbbk((\mathbf{z}))(\underline{\mathbf{g}}\big|\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}}))$ le corps que l'on obtient en ajoutant toutes les coordonnées des $\underline{\mathbf{g}}$ au corps $\Bbbk((\mathbf{z}))$. Comme les coordonnées de $\underline{\mathbf{g}}$ sont les solutions du système d'équations polynomiales $\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})$ (sur $\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))} = \Bbbk((\mathbf{z}))^{\frac{1}{\infty}}$), l'extension $\Bbbk((\mathbf{z})) \subset K$ est finie, et ainsi pour un nombre N suffisamment grand on a $K = \Bbbk((\mathbf{z}^{\frac{1}{N}}))$. Vu la condition (Ib), $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{g}} \geq 0$ pour tout $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$, et donc $\underline{\mathbf{g}} \in \Bbbk[[\mathbf{z}^{\frac{1}{N}}]]$ pour tout $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$.

Pour tout réel $\rho > 0$ posons $\mathbf{I}_\rho$ l'idéal de $\Bbbk[[\mathbf{z}^{\frac{1}{N}}]]$ défini par $\mathbf{I}_\rho = \{\mathbf{x} \in \Bbbk[[\mathbf{z}^{1/N}]] \mid \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{x}) \geq \rho\}$. Mais le couple $(\Bbbk[[\mathbf{z}]], \mathbf{I}_\rho \cap \Bbbk[[\mathbf{z}]])$ satisfait les conditions de Hensel, et comme l'extension $\Bbbk[[\mathbf{z}]] \subset \Bbbk[[\mathbf{z}^{\frac{1}{N}}]]$ est finie, le couple $(\Bbbk[[\mathbf{z}^{\frac{1}{N}}]], \mathbf{I}_\rho)$ satisfait aussi les conditions de Hensel (proposition 16 de $n°12$, §2, chap.III, [10]).

Soit $\rho > C_4$, pour tout point $\underline{\mathbf{y}}$ dans $B(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}), \rho + 2R)$ alors $\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}) - \underline{\mathbf{y}} \in (\det J\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}))^2 \mathbf{I}_\rho^{\times(n+3)}$, où $\mathbf{I}_\rho^{\times(n+3)}$ désigne le produit cartesien de $n+3$ exemplaires de $\mathbf{I}_\rho$.

Fixons donc un point $\underline{\mathbf{y}}$ de la boule $B(\mathcal{T}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}), \rho+2R)$ et notons $\underline{\mathbf{x}}$ un point à déterminer via le système d'équations $\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{y}}$. Par le lemme 4.6 (lemme de Hensel multivariationnel, appliqué à l'anneau $\Bbbk[[\mathbf{z}^{\frac{1}{N}}]]$ et l'idéal $\mathbf{I}_\rho$) on trouve qu'il existe une solution exacte de l'équation $\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{y}}$ dans la boule $B(\underline{\mathbf{g}}, \rho)$ pour tout $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$. Nous trouvons ainsi $\operatorname{card}\left(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})\right) = \deg \mathcal{T}$ solutions, une solution dans chaque boule $B(\underline{\mathbf{g}}, \rho)$ où $\mathbf{g}$ parcourt l'ensemble $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$. En fait, par le lemme 4.5 les préimages $\underline{\mathbf{x}} \in B(\underline{\mathbf{g}}, \rho)$ et $\underline{\mathbf{x}}' \in B(\underline{\mathbf{g}}', \rho)$ pour $\rho > C_4$ $\mathbf{g} \neq \mathbf{g}' \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ reprèsentent nécessairement deux points projectifs différents. Ainsi nous trouvons par cette procedure $\#\{\deg \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})\} = \deg \mathcal{T}$ préimages par $\mathcal{T}$ de $\mathbf{y}$, donc toutes les préimages. Remarquons que nous avons montré que toute préimage $\mathbf{x}$ par $\mathcal{T}$ d'un point $\mathbf{y} \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ admettant un système des coordonnées projectives $\underline{\mathbf{y}} \in B(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}), \rho + 2R)$ admet comme coordonnées projectives un élément de $B(\underline{\mathbf{g}}, \rho)$ pour tout $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$. Or, supposons que pour un $\underline{\mathbf{x}} \in \overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}^{n+3}$ nous ayons

$$\operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) \geq \rho + 2R \tag{4.19}$$

(où $\rho > C_4$). Par ce qui précède, il existe $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \in \overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}$ et $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ tels que

$$\operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{g}}) - \mathbf{b}_i \pi_i(\underline{\mathbf{x}})) \geq \rho \tag{4.20}$$

(et donc $\operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathbf{g}})) = \operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0}(\mathbf{b}_i \pi_i(\underline{\mathbf{x}}))$, vu $\rho > C_4 \geq C'$), $i = 0, 1$. En prenant $\rho > \operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{g}, \mathbf{x}) + C' = \min_{i=0,1} \operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\pi_i(\mathbf{g}), \pi_i(\mathbf{x})) + C'$, l'inégalité (4.20) est impossible (vu le lemme 1.22 (a) et la définition de C'), et donc pour $\rho \geq \operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{g}, \mathbf{x}) + C_4$ on a le contraire de (4.19), d'où pour tout $\underline{\mathbf{x}}$ il existe $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ tel que :

$$\operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) < \operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{g}, \mathbf{x}) + C_4 + 2R. \tag{4.21}$$

Démontrons maintenant le point (a). Posons $C_3 = C_4 + 2R$. Si $\operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})) \leq C_3$, on a (4.16) puisque $\operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{g}, \mathbf{x}) \geq 0$ par définition de $\operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}$. Considérons le cas $\operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})) > C_3$. Prenons n'importe quel système de coordonnées projectives $\underline{\mathbf{x}}$ pour $\mathbf{x}$. Par le lemme 1.22 (b) ils existent $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \in \overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}$ tel que $\operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathcal{T}(\mathbf{x}), \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})) = \min_{i=0,1}\left(\operatorname{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\pi_i(\mathcal{T}(\mathbf{x})), \pi_i(\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})))\right) = \min_{i=0,1}\left(\operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})) - \mathbf{b}_i \pi_i(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}})) - \operatorname{ord}_{\mathbf{z}=0} \pi_i(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}))\right)$. Le corps $\overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}$ étant algébriquement clos, $\sqrt[s+t]{\mathbf{b}_1}, \sqrt[r]{\mathbf{b}_0} \in \overline{\Bbbk((\mathbf{z}))}$ et donc $\underline{\mathbf{x}}_0 =$

$\left(\sqrt[r]{\mathbf{b}}\pi_0(\underline{\mathbf{x}}),\ \sqrt[s+t]{\mathbf{b}}\pi_1(\underline{\mathbf{x}})\right)$ satisfait

$$\begin{aligned}\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathcal{T}(\mathbf{x}),\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})) &\le \min_{i=0,1}\left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\pi_i(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}))-\pi_i(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}}'')))\right)\\ &= \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\left(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})-\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}}_0)\right)\end{aligned} \tag{4.22}$$

Maintenant, d'après (4.22) et (4.21) il existe $\mathbf{g}\in\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathcal{T}(\mathbf{x}),\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})) &= \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}})-\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}}'))\\ &\le \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{g},\mathbf{x})+1+C'+2R\\ &\le \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{g},\mathbf{x})+C_3,\end{aligned} \tag{4.23}$$

d'où (4.16).

Passons à la démonstration de la partie (b). Remarquons que nous pouvons choisir une constante $C_6>\max(C_3,C_{\text{rég}})$ si grande que pour tout $\mathbf{g}\in\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ et tous systèmes de coordonnées projectives $\underline{\mathbf{g}}_0$ et $\underline{\mathbf{x}}$ telles que $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\pi_i(\underline{\mathbf{g}}_0)=\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\pi_i(\underline{\mathbf{x}})=0$, $i=0,1$, la condition $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mathbf{g}}_0)>C_6$ implique $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\pi_i(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}}))=\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\pi_i(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}_0))$. Avec cette constante sous la main et utilisant toujours les coordonnées projectives satisfaisant $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\pi_i(\underline{\mathbf{x}})=0$, $i=0,1$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathcal{T}(\mathbf{x}),\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})) &= \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{x}})\wedge\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}_0))-2\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}_0)\\ &\ge \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}(\underline{\mathbf{x}}\wedge\underline{\mathbf{g}}_0)-2\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}_0)\\ &\ge \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{x},\mathbf{g})-2\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}_0)),\end{aligned} \tag{4.24}$$

Posons $C_0=2\max_{\mathbf{g}\in\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})}\left(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathcal{T}}(\underline{\mathbf{g}}_0)\right)$, où $\underline{\mathbf{g}}_0$ désigne un représentant satisfaisant $\pi_i(\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0}\underline{\mathbf{g}}_0)=0$, $i=0,1$. Cette constante C_0 ne dépend que de $\tilde{\mathbf{f}}$ et de $\mathcal{T}$.

Maintenant choisissons $\tilde{C}_3=\max(C_0,C_6)$. Si $\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{x},\mathbf{g})\le C_6$, le côté gauche de (4.17) est négatif ou nul, tandis que le côté droit de cette inégalité est positif ou nul vu la définition de Ord. Donc, dans ce cas (4.17) est vraie. Par ailleurs, si $\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{x},\mathbf{g})>C_6$, l'inégalité (4.17) est aussi vraie car dans ce cas nous avons l'estimation (4.24).

Pour la partie (c) de l'énoncé, remarquons tout d'abord que pour $C_5'>C_4$ les boules $B(\underline{\mathbf{g}},C_5')$ sont d'intersection vide deux à deux (vu le lemme 4.5). De plus, tous les points de la boule $B(\mathcal{T}(\underline{\tilde{\mathbf{f}}}),C_3+C_5')$ ont le nombre maximal (donc $\deg\mathcal{T}$) de préimages. Ainsi si $\mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{y},\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}}))>C_3+C_5'$, nous trouvons avec (4.16) qu'il existe exactement $\deg\mathcal{T}$ points dans $\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{y})$, un ayant un système de coordonnées projectives dans chaque boule $B(\underline{\mathbf{g}},C_5')$ pour $\mathbf{g}\in\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{f}})$ (vu la partie a)). L'inégalité (4.18) résulte maintenant de (4.16) et (4.17).■

4.2 Certains cas particuliers

Dans ce paragraphe nous notons $\mathcal{T}$ une transformation définie par (2.118) et dominante. Introduisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.8. Le système d'équations fonctionnelles associé à $\mathcal{T}$ ne possède pas de solution algébrique sur $\Bbbk(\mathbf{z})$.

Dans ce paragraphe nous allons démontrer le lemme de multiplicité pour l'ensemble de deux fonctions $(\mathbf{z}, f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z}))$ vérifiant l'hypothèse (3.1) et telles que le morphisme $\mathcal{T}$ correspondant satisfait l'hypothèse 4.8.

La démonstration est fourni par deux lemmes valables en toute dimension.

Lemme 4.9. *Soit $\mathcal{T}$ une transformation définie par (2.118) et satisfaisant l'hypothèse 3.1 avec* $\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} p(\mathbf{z}) \geq 2$. *Soit W une variété irréductible, définie sur $\Bbbk$, $\mathcal{T}$-stable, de dimension au moins* 1 *sur $\Bbbk$ et satisfaisant*

$$\mathrm{ord}_{\tilde{\mathbf{f}}} W > \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{f}(\mathbf{z}) \wedge \mathbf{f}(0)). \tag{4.25}$$

Supposons de plus que $\mathcal{T}^N$ satisfait l'hypothèse 4.8 pour tout $N \leq \deg W$.

Alors la dimension de W sur $\Bbbk$ est au moins 2.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\dim_{\Bbbk} W = 1$. Reprenons la notation (3.9). Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la variété $W_{p^{[N]}(\mathbf{z})}$ est de dimension 0 sur $\Bbbk(\mathbf{z})$. L'hypothèse (4.25) implique qu'au moins un point α de $W_{\mathbf{z}}$ n'est pas défini sur $\Bbbk$ et ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$ le point $\mathcal{T}^N(\alpha)$ aussi n'est pas défini sur $\Bbbk$ (car $\mathcal{T}$ est définie sur $\Bbbk$ et est dominante).

Comme W et $\mathrm{irr}\,\mathcal{T}$ sont définies sur $\Bbbk$, $W \cap \mathrm{irr}\,\mathcal{T}$ est aussi définie sur $\Bbbk$ et ainsi $\mathcal{T}^N(W_{\mathbf{z}}) \not\subset \mathrm{irr}\,\mathcal{T}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Vu la définition de $\mathcal{T}$, on a $\mathcal{T}(W_{p^{[N]}(\mathbf{z})}) \subset W_{p^{[N+1]}(\mathbf{z})}$. Donc $\mathcal{T}$ induit une application de l'ensemble B des branches de $\mathcal{T}(W)$ au voisinage de $(0, \mathbf{f}(0))$ (qui ne sont pas définies sur $\Bbbk$) dans lui même. L'ensemble B est de cardinal fini, donc $B_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{N=0}^{+\infty} \mathcal{T}^N(B)$ est non-vide et $\mathcal{T}$ induit une permutation sur B_1. Ainsi pour un $N \leq \mathrm{card} B_1 \leq \mathrm{card} B \leq \deg W$ l'application $\mathcal{T}^N$ agit sur une branche $\alpha(\mathbf{z})$ de W au voisinage de $(0, f(0))$ comme la substitution de $p^{[N]}(\mathbf{z})$ à la place de $\mathbf{z}$:

$$\mathcal{T}^N(\alpha(\mathbf{z})) = \alpha\left(p^{[N]}(\mathbf{z})\right).$$

Cette dernière égalité contredit l'hypothèse 4.8.■

Dans la démonstration suivante nous utiliserons les quantités δ_0 et δ_1 introduites dans la définition 1.15. Ces quantités dépendent des constantes μ, ν_0, ν_1. Ici nous posons $\mu = t$, $\nu_0 = r$ et $\nu_1 = s$, où s, r, t sont définies au début de ce chapitre.

Lemme 4.10. *Soit $\mathcal{T}$ une transformation définie par (2.118) et satisfaisant l'hypothèse 3.1 avec*

$$\lambda = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} p(\mathbf{z}) \geq 2 \tag{4.26}$$

Soit C un nombre réel satisfaisant (1.53) et

$$C \geq \max\left(\left(\frac{3n!c_n^{\frac{n-1}{n}}(C_3+C_5')}{(\lambda-1)\min(\nu_0,\mu)}\right)^n, c_n^{n-1}\right). \tag{4.27}$$

Soit $P \in \mathcal{A}$ et supposons que P et C satisfont (1.52).

Alors, $i_0(\mathcal{Z}_C(P)) \geq 2$.

Démonstration. L'hypothèse (4.27) et le lemme 1.29 impliquent qu'il existe un point (sur $\overline{\Bbbk(\mathbf{z})}$) $\alpha \in \mathcal{Z}_C(P)$ satisfaisant

$$\mathrm{Ord}(\mathbf{f}(\mathbf{z}), \alpha(\mathbf{z})) > \frac{C_3+C_5'}{\lambda-1}. \tag{4.28}$$

Soit $P_1 \in \mathcal{A}$ un polynôme s'annulant sur $\mathcal{Z}_C(P)$ de degrés

$$\begin{aligned} \deg_{\underline{X}'} P_1 &= \delta_0(\mathcal{Z}_C(P)), \\ \deg_{\underline{X}} P_1 &= \delta_1(\mathcal{Z}_C(P)). \end{aligned}$$

et notons $L \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ord}(\mathbf{f}, \mathcal{V}(P_1))$. Vu (4.28) on a

$$L > \frac{C_3+C_5'}{\lambda-1}. \tag{4.29}$$

Notons γ un point appartenant au lieu de zéros de P_1 et satisfaisant $\mathrm{Ord}(\mathbf{f}, \gamma) = L$.

Par substitution de $p(\mathbf{z})$ au lieu de $\mathbf{z}$ et en utilisant l'hypothèse (4.26) nous trouvons

$$\mathrm{Ord}\left(\mathbf{f}(p(\mathbf{z})), \gamma(p(\mathbf{z}))\right) = \lambda L > \frac{\lambda}{\lambda-1}(C_3+C_5').$$

Par le lemme 4.7 il existe un point $\beta \in \mathcal{T}^{-1}\left(\gamma(p(\mathbf{z}))\right)$ satisfaisant

$$\mathrm{Ord}(\mathbf{f}(\mathbf{z}), \beta(\mathbf{z})) \geq \lambda L - C_3 > L. \tag{4.30}$$

(on a l'inégalité $\lambda L - C_3 > L$ vu (4.29)). Comme $\mathcal{V}(P)$ est défini sur $\Bbbk$, on a $\gamma(p(\mathbf{z})) \in \mathcal{V}(P)$, et donc

$$\beta \in \mathcal{T}^{-1}\left(\mathcal{Z}_C(P)\right) \subset \mathcal{V}(\underline{\mathcal{T}}^* P_1). \tag{4.31}$$

Notons Q un facteur irréductible de $\underline{\mathcal{T}}^* P_1$ tel que $Q(\beta(\mathbf{z})) = 0$. L'inégalité (4.30) implique

$$\mathrm{ord}(\mathbf{f}, \mathcal{V}(Q)) > L$$

et ainsi Q ne peut pas diviser P_1, donc P_1 et Q s'intersecte proprement et $\mathrm{rg}\,(P, Q) \geq 2$.

Les degrés de Q satisfont

$$\begin{aligned}\deg_{\underline{X}'} Q &\leq \deg_{\underline{X}'}(\underline{\mathcal{T}}^* P_1) \leq \mu \deg_{\underline{X}'} P_1 = \mu\delta_0(\mathcal{Z}_C(P)), && (4.32)\\ \deg_{\underline{X}} Q &\leq \nu_0\delta_0(\mathcal{Z}_C(P)) + \nu_1 \deg_{\underline{X}} \delta_1(\mathcal{Z}_C(P)), && (4.33)\end{aligned}$$

donc $Q \in V_2(\mathcal{Z}_C(P))$.

Si Q ne s'annule pas sur $\mathcal{Z}_C(P)$, alors par le théorème 4.11 du chapitre 3 de [32] (appliqué au cycle $\mathcal{Z}_C(P)$ et le polynôme $\mathbf{Q}_1(\underline{X}) = Q(1, \mathbf{z}, \underline{X})$) nous avons

$$\mathrm{Ord}_{\mathbf{f}} \mathbf{Z}_C(P) \leq \deg \mathbf{Z}_C(P) \deg_{\underline{X}'} Q + h(\mathbf{Z}_C(P)) \deg_{\underline{X}} Q. \tag{4.34}$$

Comme $\delta_0(\mathcal{Z}_C(P)) \leq \deg_{\underline{X}'} P$ et $\delta_1(\mathcal{Z}_C(P)) \leq \deg_{\underline{X}} P$, nous estimons avec (4.32) et (4.33)

$$\begin{aligned}\deg_{\underline{X}} Q &\leq \mu \deg_{\underline{X}} P_1,\\ \deg_{\underline{X}'} Q &\leq \nu_0 \deg_{\underline{X}'} P_1 + \nu_1 \deg_{\underline{X}} P_1.\end{aligned}$$

Ainsi nous déduisons de (4.34)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ord}_{\mathbf{f}} \mathbf{Z}_C(P) \leq \mu \deg \mathbf{Z}_C(P) \deg_{\underline{X}'} P + \nu_0 h(\mathbf{Z}_C(P)) \deg_{\underline{X}'} P&\\ + \nu_1 h(\mathbf{Z}_C(P)) \deg_{\underline{X}} \deg_{\underline{X}} P.&\quad (4.35)\end{aligned}$$

Compte tenu de l'inégalité (1.46) nous trouvons l'estimation $c_n^{-1}(c_n C)^{\frac{1}{n}} < 1$, et donc

$$C < c_n^{n-1},$$

ce qui contredit (4.27).

Ainsi, Q s'annule sur $\mathcal{Z}_C(P)$ et donc

$$\mathrm{rg}\,(I_0\,(V_2(\mathcal{Z}_C(P)), \mathcal{I}(\mathcal{Z}_C(P)))) \geq \mathrm{rg}\,(P, Q) \geq 2,$$

d'où $i_0(\mathcal{Z}_C(P)) \geq 2$. ■

Proposition 4.11. *Soit $\mathcal{T} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ une transformation bi-projective définie comme dans (2.118), satisfaisant l'hypothèse 3.1 avec*

$$\lambda = \mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} p(\mathbf{z}) \geq 2. \tag{4.36}$$

Supposons de plus que pour tout $N \in \mathbb{N}$ l'application $\mathcal{T}^N$ satisfait l'hypothèse 4.8.

Alors, il existe une constante $K \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout polynôme $P(\mathbf{z}, X_1, X_2)$ on ait

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{z}=0} P(\mathbf{z}, f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z})) \leq K \deg_{\mathbf{z}} P \left(\deg_{\underline{X}} P\right)^2. \tag{4.37}$$

Démonstration. Toutes les conditions du lemme 4.10 sont satisfaites, ainsi si un polynôme P satisfait (1.52) avec un C vérifiant les estimations (1.53) et (4.27), alors $i_0(\mathcal{Z}_C(P)) \geq 2$ (et dans le cas contraire on a immédiatement l'estimation (4.37) pour P avec K égale au maximum des constantes provenant de (1.53) et (4.27)).

Nous allons appliquer le théorème 2.34. Par ce que précède, il suffit de vérifier la condition (2.122) pour des idéaux du rang ≥ 2. Dans le même temps le lemme (4.9) nous assure que dans ce cas

$$\mathrm{ord}_{\mathbf{f}} W \leq K_0$$

avec $K_0 = \mathrm{Ord}_{\mathrm{z}=0}(\mathbf{f}(\mathbf{z}) \wedge \mathbf{f}(0))$. Ainsi la condition (2.122) se trouve établie et nous pouvons appliquer le théorème 2.34. Ce théorème nous fournit le résultat souhaité (4.37).■

Index

Notations

Bibliographie

[1] M.Amou, K.Väänänen, "An analogue of Shidlovskii's lemma for certain q-difference equations", Aequationes Math. 65 (2003), no. 1-2, 93-101.

[2] M.Amou, T.Matalaaho, K.Väänänen, "On Siegel-Shidlovskii's theory for q-différence equations. Acta Arithmetica, 127, 2007, 309-335.

[3] E.Artin, "Theory of algebraic numbers", Notes by Gerhard Würges from lectures held at the Mathematisches Institut, Göttingen, vol. 1956/7, George Striker, Schildweg 12, Göttingen, 1959.

[4] P.-G.Becker, "Transcendence of the values of functions satisfying generalized Mahler type functional equations", J. Reine Angew. Math. 440 (1993), 111-128.

[5] P.-G.Becker, "Transcendence measures for the values of generalized Mahler functions in arbitrary characteristic", Publ. Math. Debrecen 45 (1994), 269-282.

[6] P.-G.Becker, W.Bergweiler, "Transcendency of local conjugacies in complex dynamics and transcendency of their values", Manuscripta Math. 81 (1993), 111-128.

[7] D.Bertrand, "Multiplicity estimates for q-différence operators" à "Diophantine Geometry : proceedings", ed. U.Zannier, CRM series 4, 2007, 65-71.

[8] V.Bosser & F.Pellarin "Differential properties of Drinfeld quasi-modular forms" Int. Math. Res. Not. (2008), no.11.

[9] V.Bosser & F.Pellarin "On certain families of Drinfeld quasi-modular forms" J. of Number Theory, Vol. 129, I. 12, 2009, 2952-2990.

[10] N.Bourbaki, "Éléments de mathématiques. Algèbre commutative", chapitres 3 et 4, Paris, Hermann, 1961.

[11] W.D.Brownawell "Zero estimates for solutions of differential equations", Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982), 67-94, Progr.Math., 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[12] W.D.Brownawell, D.W.Masser "Multiplicity estimates for analytic functions I", J.Reine Angew. Math. 314 (1980), 200-216.

[13] W.D.Brownawell, D.W.Masser "Multiplicity estimates for analytic functions II", Duke Math.J. 47 (1980), no.2, 273-295.

[14] M.Chardin, "Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique", Bulletin de la S.M.F., tome 117, n 3 (1989), 305-318.

[15] M.Chardin, P.Philippon, "Régularité et interpolation", J. Algebraic. Geom., 8, 471-481 (1999).

[16] G.V.Chudnovsky, "Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence. Recent progress", Journées Arithmétiques 1980 (J.Armitage, ed.), Cambridge Univ. Press, 1982, 11-82.

[17] D.Eisenbud, "Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry", Springer, 2004.

[18] B.Greuel, "Algebraic independence of Mahler functions", Archivee der Mathematik, 75 (2000), 121-124.

[19] A.Groethendieck, "Séminaire de géométrie algébrique. Révétements étales et group fondamental", Springer-Verlag, 1971.

[20] Ch.Jadot, "Critères pour l'indépendance algébrique et linéaire", thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 1996. Disponible à hal.archives-ouvertes.fr.

[21] I.Kaplansky, "An introduction to differential algebra", Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, Paris, 1957.

[22] K.K.Kubota, "On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values", Math.Ann. 227 (1977), 9-50.

[23] S.Lang, "Fundamentals of Diophantine Geometry", Springer-Verlag, 1983

[24] J.S.Milne, "Étale Cohomology", Princeton Mathematical Series 33, Princeton University Press, 1980.

[25] H.Movassati, "On elliptic modular foliations", Indagationes Mathematicae 19 (2008) No.2 263-286.

[26] Yu.V.Nesterenko, "Estimations of Order of Zeros of Analytical Functions of a Certain Class and their Applications in the Theory of Transcendental Numbers", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 205, N2 (1972), 292-295.

[27] Yu.V.Nesterenko, "On Some Properties of Solutions to Linear Differential Equations and their Applications to Transcendental Number Theory", thèse de doctorat de l'Université d'Etat de Moscou, 1973

[28] Yu.V.Nesterenko, "On the algebraic independence of the components of solutions of a system of linear differential equations", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 (1974), 495-512 ; Math. USSR Izv. 8 (1974), 501-518.

[29] Yu.V.Nesterenko, "Zero order estimates for functions of a certain class", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 41 (1977), no.2, 253-284.

[30] Yu.V.Nesterenko, "Estimates for the number of zeros of certain functions", in New advances in transcendence theory, ed. A.Baker, Cambridge Univ. Press, (1988), 263-269.

[31] Yu.V.Nesterenko, "Modular functions and transcendence questions", Math.Sb. 187/9 (1996), 65-96 (Russian) ; English translation in Sb.Math. 187/9, 1319-1348.

[32] Yu.Nesterenko, Patrice Philippon (eds.), "Introduction to Algebraic Independence Theory", Vol. 1752, 2001, Springer.

[33] K.Nishioka, "On an estimate for the order of zeros of Mahler type functions", Acta Arith. 56 (1990), 249-256.

[34] D.G.Northcott, "Lessons on rings, modules and multiplicities", Cambridge Univ. Press, 1968.

[35] F.Pellarin, "La structure différentielle de l'anneau des formes quasi-modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$", Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, Tome 18, n1 (2006), 241-264.

[36] F.Pellarin, "Estimating the order of vanishing at infinity of Drinfeld quasimodular forms", prépublication, 2009,
hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/40/75/49/PDF/multiplicity3.pdf.

[37] F.Pellarin, "An introduction to Mahler's method for transcendence and algebraic independence", preprint, 2010.

[38] P.Philippon, "Théorème des zéros effectif et élimination". Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 1, N1 (1989), 137–155.

[39] P.Philippon, "Dénominateurs dans le théorème des zéros de Hilbert", Acta Arithmetica, LVIII.1, 1991.

[40] P.Philippon, "Sur des hauteurs alternatives" I, Math. Ann. 289 (1991),255-283 ; II, Ann. Inst. Fourrier (Grenoble) 44/4 (1994), 1043-1065 ; III, J. Math. Pures Appl. 74/4 (1995), 343-365.

[41] P.Philippon, "Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques". J. Number Theory 64 (1997) 291-338.

[42] P.Philippon, "Indépendance algébrique et K-fonctions". J. reine angew. Math. 497 (1998), 1-15.

[43] P.Philippon, "Approximations fonctionnelles des courbes dans des espaces projectifs", à paraître dans Internat. J. Number Theory. Disponible à hal.archives-ouvertes.fr, idéntifiant hal-00480924.

[44] C.L.Siegel, "Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen", Abh. Pruess. Akad. Wiss. Phys. Math. (1929)

[45] C.L.Siegel, "Über die Perioden elliptischer Funktionen", J. f. M. 167 (1932), pp.62-69.

[46] Th.Schneider, "Transcendenzuntersuchungen periodischer Functionen" 1 et 2, J. reine und angew Math., Bd. 172, (1934).

[47] J.Tamura, "Symmetric continued fractions related to certain series", J. Number Theory 38 (1991), 251Ű264.

[48] R.Tijdeman, "An auxiliary result in the theory of transcendental numbers", J. Number Theory 5 (1973), 80-94.

[49] Th.Töpfer, "Algebraic independence of the values of generalized Mahler functions", Acta Arithmetica, LXX.2 (1995).

[50] Th.Töpfer, "Zero order estimates for functions satisfying generalized functional equations of Mahler type", Acta Arithmetica, LXXXV.1 (1998).

[51] K.Väänänen, W.Zudilin, "Linear independence of values of Tchakaloff functions with different parameters", J. Number Theory 128 (2008), 2549-2558.

[52] M.Waldschmidt, "Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups", Springer, 2000.

[53] O.Zariski, P.Samuel, "Commutative algebra", Springer, 1976.

[54] Sh.-W. Zhang, "Distributions in Algebraic Dynamics", A tribute to Professor S.-S. Chern, Survey in Differential Geometry, vol. 10, 381-430, International Press 2006.